Inhaltsverzeichnis

Kapitel 2

Grundlagen der Gleichstromtechnik

2.1 Der Stromkreis

2.1.1 Der elektrische Strom

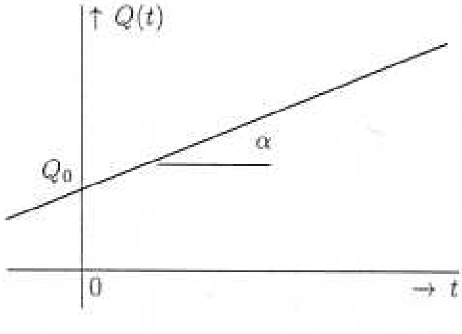
Der Strom ist zu $i(t) = dQ/dt$ definiert. Ist $i(t) = I = konst.$, so spricht man von *Gleichstrom*.

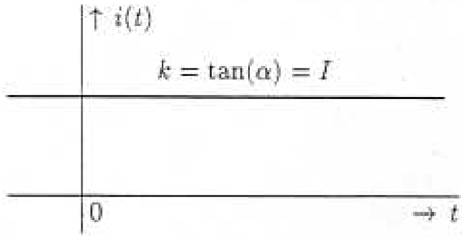
Beispiel
Die über eine Leitung transportierte Ladung nimmt, wie rechts dargestellt, linear mit der Zeit zu

$$Q = Q_0 + k \cdot t, \ k = \tan(\alpha).$$

Dann ist

$$i(t) = I = \frac{dQ}{dt} = k = \tan(\alpha).$$

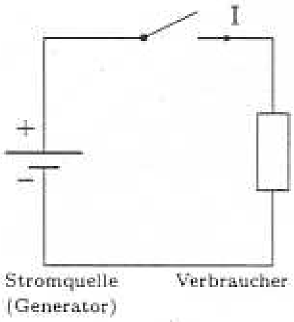




Fließt ein Strom durch einen Leiter mit dem Querschitt A, dann ist

$$S = \frac{I}{A}$$

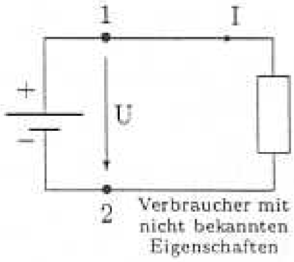
die *Stromdichte*. In der Energietechnik sind Werte von $1\,A/mm^2$ bis $100\,A/mm^2$ üblich. In der Nachrichtentechnik in der Regel sehr viel kleinere Werte.



Man ordnet dem Strom eine Zählrichtung zu, welche der Bewegungsrichtung positiver Ladungsträger entsprechen würde. Diese Zählrichtung wird durch einen Pfeil gekennzeichnet.

Der Strom fließt nur, wenn der Schalter geschlossen ist und dadurch ein *geschlossener Stromkreis* entsteht.

2.1.2 Spannung und Potential



Innerhalb der Energiequelle sind ladungstrennende Kräfte vorhanden, so daß beim Anschluß eines Verbrauchers ein Strom fließen kann.
Durch den Stromfluß wird im Verbraucher Energie umgesetzt (z.B. Erwärmung eines Heizofens). Die *Leistung* (Energie/Zeiteinheit) ist proportional zur Göße des Stromes, es gilt

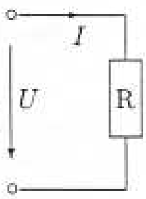
$$P = U \cdot I.$$

Die "Proportionalitätskonstante" U ist die *Spannung* zwischen den Klemmen 1-2, ihr wird ebenfalls eine Richtung von + nach − bei der Energiequelle zugeordnet.

Den Strömen und Spannungen werden generell Richtungen zugeordnet. Bei einem Verbraucher hat U und I stets die gleiche Richtung (*Verbraucherpfeilsystem*). Für eine bestimmte Energiequelle ist P natürlich nicht beliebig groß. Es zeigt sich, daß bei technischen Quellen der Strom I nicht beliebig groß werden kann, ohne daß gleichzeitig die Spannung U kleiner wird.

Es ist auch üblich, Punkten in einem Stromkreis (z.B. den Punkten 1 und 2 im Bild oben) *Potentiale* zuzuordnen. Bei den Potentialen handelt es sich um Spannungen, die so festgelegt werden, daß die Potentialdifferenz der Spannung zwischen den Punkten entspricht.

2.1.3 Elektrischer Widerstand und Leitwert



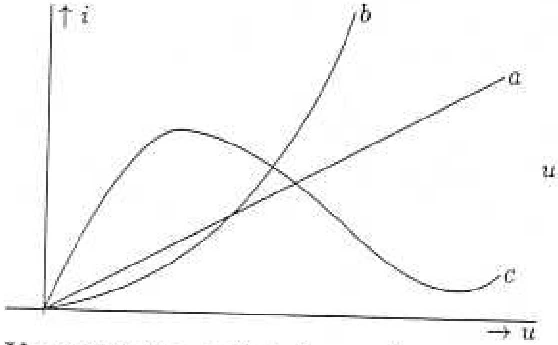
Um einen Strom durch einen Leiter fließen zu lassen, ist eine gewisse Energie aufzubringen. Diese läßt sich physikalisch durch das Vorhandensein eines *elektrischen Widerstandes* erklären, den ein Leiter unter normalen Verhältnissen dem Stromfluß entgegensetzt.

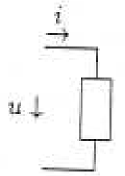
Es gilt

$$I = \frac{1}{R}U = G \cdot U$$

mit dem Widerstand R und dem Leitwert $G = 1/R$. Diese Gleichung wird in der Elektrotechnik als *Ohmsches Gesetz* bezeichnet.

Hat ein Verbraucher zwei Klemmen, so spricht man von einem *Zweipol* oder bisweilen auch von einem *Eintor*. Der Widerstand ist also ein Zweipolelement.





Kurve a: Linearer Zusammenhang von i und u

$$i = k \cdot u,\ k = G,\ I = G \cdot U.$$

Die Steigung der Geraden entspricht dem Leitwert.

Kurven b und c: Kein linearer Zusammenhang zwischen Strom und Spannung. In solchen Fällen kann man einen *differentiellen Leitwert bzw. differentiellen Widerstand* definieren

$$g = \frac{di}{du} \approx \frac{\Delta i}{\Delta u},\ r = \frac{du}{di}.$$

Bei dem Zusammenhang nach Kurve b ist der differentielle Leitwert stets positiv. Beim Verlauf nach Kurve c gibt es auch Bereiche mit $g = di/du < 0$ (negativer Leitwert, Widerstand).

Leitwert und Widerstand von Drähten (Leitungen)
ρ: spezifischer Widerstand in $\Omega\, mm^2/m$, $\kappa = 1/\rho$: spezifischer Leitwert. Dann hat ein Draht mit dem Querschnitt A und der Länge l einen Widerstand

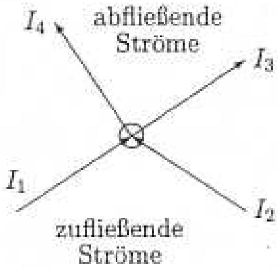
$$R = \rho \cdot \frac{l}{A} = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{l}{A}.$$

Beispiel: Ein 100 m langer Kupferdraht mit einem Querschnitt von $1,5\, mm^2$, einem spezifischen Widerstand $\rho = 0,017\, \Omega\, mm^2/m$ hat gemäß der oben angegebenen Gleichung einen Widerstand von $R = 0,017 \cdot 100/1,5 = 1,133\, \Omega$. Wie bei den zusätzlichen Bemerkungen im Abschnitt 1.3.1 ausgeführt wurde, ist der Widerstand temperaturabhängig und nimmt mit steigender Temperatur zu.

2.1.4 Die Kirchhoffschen Sätze

2.1.4.1 Die Knotenpunktsregel

Das 1. Gesetz von Kirchhoff ist die Knotenpunktsregel:



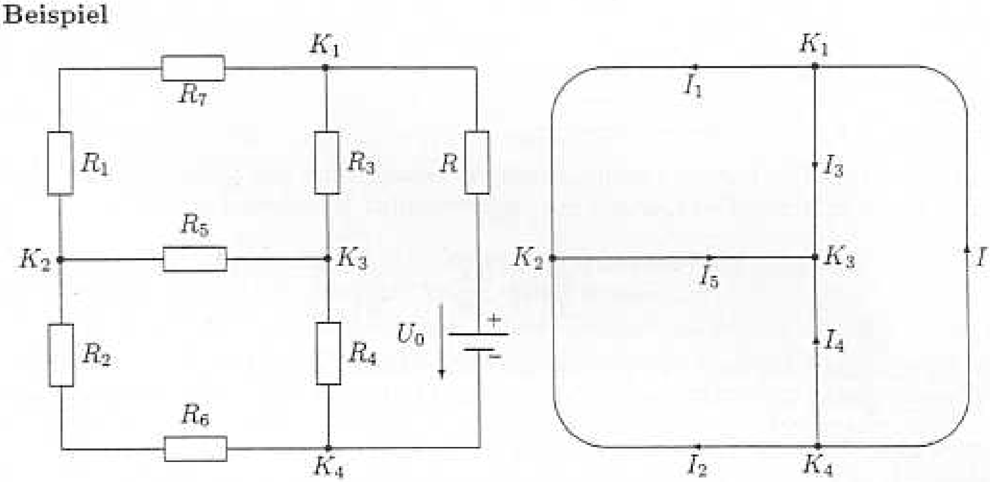
Die Summe der auf einen Knoten zufließenden Ströme ist gleich mit der Summe der abfließenden Stöme

$$\sum I_{zu} = \sum I_{ab}, \text{ oder } \sum_{\nu=1}^{n} I_\nu = 0.$$

hier: $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$ oder $+I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$.

Bei Beachtung der Vorzeichen der Ströme, ist die Summe aller auf einen Knoten zufließenden (oder auch aller abfließenden) Ströme Null. Im vorliegende Beispiel wurden die zufließenden Ströme I_1 und I_2 positiv und die abfließenden I_3 und I_4 negativ angenommen. Man kann aber auch die abfließenden Ströme positiv und die zufließenden negativ ansetzen. Dies bedeutet lediglich eine Multiplikation auf beiden Seiten der Knotengleichung mit dem Faktor -1.

Beispiel



Das Bild zeigt links ein Netzwerk mit insgesamt 4 Knoten K_1 bis K_4. Im rechten Bildteil ist der sogenannte *Graph* des Netzwerkes mit dort eingetragenen Strömen skizziert. Aus einem Netzwerk erhält man den Graphen, wenn die Knoten markiert werden und zwischen den Knoten die im Netzwerk bestehenden Verbindungsstrecken eingetragen werden.

Zur Aufstellung der vier Knotengleichungen werden auf Knoten zufließende Ströme postitiv und abfließende negativ angesetzt. Dann erhält man die folgenden Knotengleichungen.

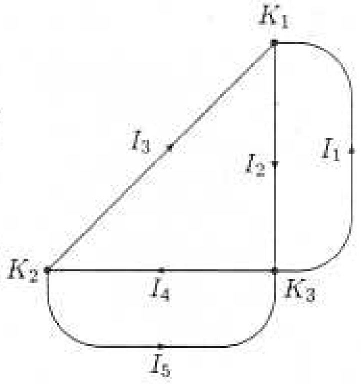
Knoten 1:	$+I$	$-I_1$		$-I_3$			$=0$
Knoten 2:		$+I_1$	$+I_2$			$-I_5$	$=0$
Knoten 3:				$+I_3$	$+I_4$	$+I_5$	$=0$
Knoten 4:	$-I$		$-I_2$		$-I_4$		$=0$

Jeder Strom ist einmal ein zufließend und einmal abfließend, er muß in den Gleichungen positiv *und* negativ auftreten. Daher kann die Gleichung für den Knoten 4 *ohne Kenntnis des Netzwerkes* angeschrieben werden. Die 4. Gleichung ergibt sich aus den drei anderen, Gl. 4 ist linear von den anderen abhängig.

Ergebnis:
Bei einem Netzwerk mit k Knoten gibt es nur $k-1$ linear unabhängige Knotengleichungen. Die k-te Gleichung liefert keine neue Aussage, sie kann aus den anderen berechnet werden.

Beispiel

Gesucht ist der Graph eines Netzwerkes mit seinen Strömen. Das Netzwerk hat die Knoten K_1, K_2 und K_3. Gegeben sind die beiden Gleichungen:
Knoten 1: $I_1 - I_2 + I_3 = 0$, Knoten 2: $-I_3 + I_4 - I_5 = 0$.
Damit jeder Strom genau einmal zufließend *und* abfließend auftritt, muß die 3. Gleichung $-I_1 + I_2 - I_4 + I_5 = 0$ lauten. Der sich ergebende Graph ist rechts dargestellt.



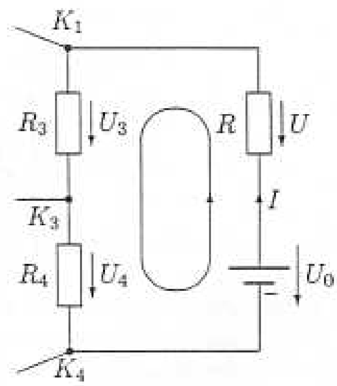
2.1.4.2 Die Maschenregel

Das 2. Kirchhoffsche Gesetz ist die Maschenregel. Als *Masche* bezeichnet man einen geschlossenen Weg in einem Netzwerk (siehe das folgende Beispiel). Einer Masche wird eine (beliebige) Zählrichtung zugeordnet.

Die Summe aller in einer Masche wirkenden Quellenspannungen ist gleich der Summe der entstehenden Spannungsabfälle:

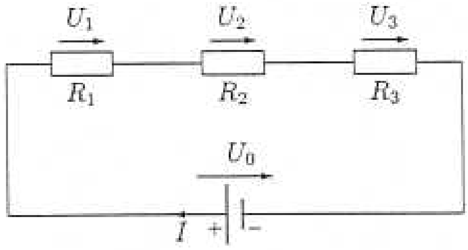
$$\sum_{\nu=1}^{n} U_\nu = 0 \text{ Vorzeichen beachten!}$$

Beispiel
Maschengleichung: $-U_0 - U + U_3 + U_4 = 0$.
Die Richtungen für die Spannungen an den Widerständen kann man beliebig wählen. Bei der hier gewählten Richtung für z.B. die Spannung U ergibt sich für U ein negativer Zahlenwert weil der Strom I in der genau umgekehrten Richtung durch den Widerstand fließt.
In einem Netzwerk kann es unter Umständen eine sehr große Anzahl von Maschen geben, mindestens aber eine Masche.



2.1.5 Die Schaltung von Widerständen

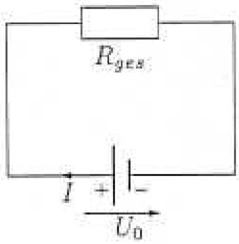
2.1.5.1 Reihenschaltung



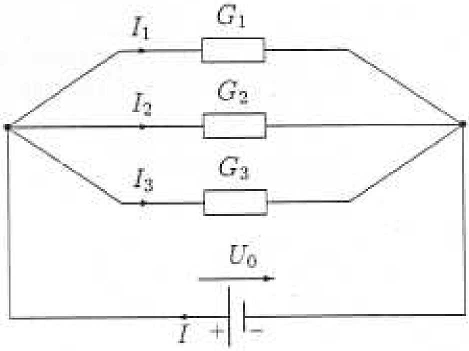
Maschengleichung: $U_1 + U_2 + U_3 - U_0 = 0$,
Ohmsches Gesetz: $U_1 = R_1 \cdot I$, $U_2 = R_2 \cdot I$,
$U_3 = R_3 \cdot I$,
$I \cdot (R_1 + R_2 + R_3) = U_0$, $I \cdot R_{ges} = U_0$,
$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3$.

Reihenschaltung von Widerständen:

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots R_n.$$



2.1.5.2 Parallelschaltung



Knotengleichung: $I_1 + I_2 + I_3 - I = 0$,
Ohmsches Gesetz: $I_1 = G_1 \cdot U_0$, $I_2 = G_2 \cdot U_0$,
$I_3 = G_3 \cdot U_0$
$U_0 \cdot (G_1 + G_2 + G_3) = I$, $U_0 \cdot G_{ges} = I$,
$G_{ges} = G_1 + G_2 + G_3$.

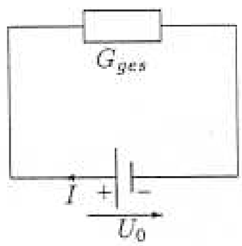
Parallelschaltung von Leitwerten:

$$G_{ges} = G_1 + G_2 + G_3 + \ldots G_n.$$

Parallelschaltung von zwei Widerständen:

$$G_{ges} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2},$$

$$\boxed{R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.}$$

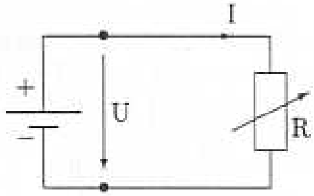


Die Parallelschaltung hat gegenüber der Reihenschaltung die Eigenschaft, daß alle Widerstände an der gleichen Spannung liegen. Einzelne parallelgeschaltete Widerstände können zu- oder abgeschaltet werden, ohne daß sich an den anderen etwas ändert. Bei der Reihenschaltung ist dies anders. Die Wegnahme (genauer "Überbrückung") eines Widerstandes verändert den Strom und die Spannungsabfälle an allen anderen Widerständen in der Reihenschaltung. Verbraucher sind daher meistens für eine feste Betriebsspannung dimensioniert und werden parallel geschaltet.

$I_1 = G_1 \cdot U_0$

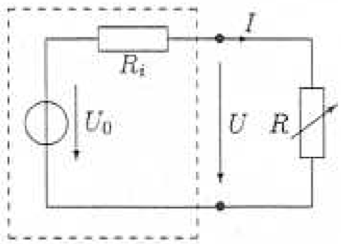
2.1.6 Die Zweipolquelle

Spannungsquellen



Die *Leerlaufspannung* ist die im nicht belasteten Zustand gemessenen Spannung. Belastet man eine Spannungsquelle mit einem variablen Widerstand R, so stellt man fest, daß die Klemmenspannung mit zunehmendem Strom abnimmt.

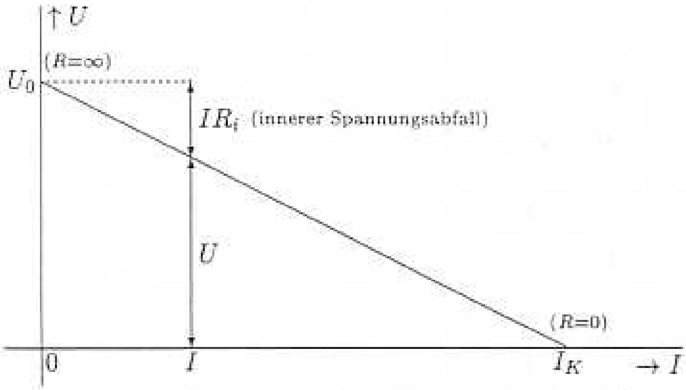
Dieses Verhalten läßt sich so erklären, daß die Spannungsquelle einen "inneren Widerstand" R_i hat.



Wie rechts dargestellt, wird die reale Spannungsquelle in eine ideale Spannungsquelle mit der belastungsunabhängigen Spannung U_0 und einen Innenwiderstand R_i aufgeteilt. Der Innenwiderstand bewirkt eine Abnahme der Klemmenspannung U bei einer Belastung der Spannungsquelle:

$$I = \frac{U_0}{R + R_i}, \; U = I \cdot R = U_0 \cdot \frac{R}{R + R_i}, \; U = U_0 - I \cdot R_i.$$

Fall $R = 0$:
$U = 0$, $I = I_{max} = I_k = U_0/R_i$ ist der maximale Strom, der *Kurzschlußstrom*.
Fall $R = \infty$:
$I = 0$, $U = U_0$ ist die maximale Spannung, die *Leerlaufspannung*.
Diese Zusammenhänge sind rechts im Bild dargestellt.



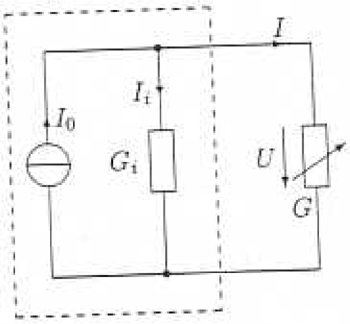
Eine Spannungsquelle heißt *linear*, wenn U_0 und R_i konstant sind, so daß zwischen der Klemmenspannung und dem Strom der im obigen Bild dargestellte lineare Zusammenhang

$$U = U_0 - I \cdot R_i$$

besteht.

Ein Hinweis: Bei realen Spannungsquellen besteht dieser lineare Zusammenhang allenfalls innerhalb eines zulässigen "Belastungsbereiches". Ein Versuch, den Kurzschlußstrom I_k durch Kurzschließen der Klemmen zu erzeugen, wird in den meisten Fällen zur Zerstörung der Energiequelle führen.

$J = \frac{V_0}{R_n + R_i}$ $U = J \cdot R$



Stromquellen

Eine Energiequelle kann auch als Stromquelle aufgefaßt werden, zu der parallel ein "innerer Leitwert" G_i geschaltet ist. Die Stromquelle liefert einen belastungsunabhängigen *Urstrom* I_0.

Knotengleichung: $I = I_0 - I_i$,

Ohmsches Gesetz: $I_i = G_i \cdot U$, $I = I_0 - G_i \cdot U$,

$$U = \frac{I_0}{G_i} - \frac{I}{G_i} = I_0 \cdot R_i - I \cdot R_i \text{ mit } R_i = \frac{1}{G_i}.$$

Ein Vergleich mit der oben abgeleiteten Beziehung

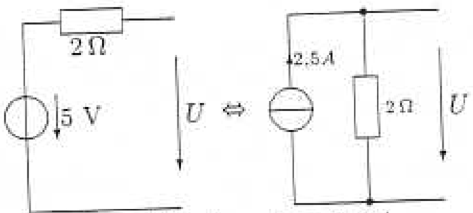
$$U = U_0 - IR_i$$

bei der Spannungsquelle zeigt, daß sich beide ineinander umrechnen lassen, es gilt

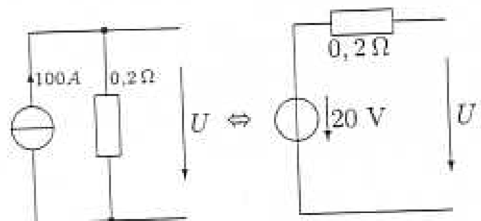
$$U_0 = I_0 \cdot R_i, \; G_i = \frac{1}{R_i}.$$

Ergebnis: Eine Energiequelle kann intern als Spannungs- oder als Stromquelle aufgefaßt werden. Die Wirkungen an den Klemmen sind identisch. Beschreibungsgrößen sind der Kurzschlußstrom und die Leerlaufspannung. Physikalisch ist oft die Beschreibung als Spannungsquelle sinnvoller. Beim Modell als Stromquelle wird im belastungsfreien Fall intern ständig die Leistung $P_i = I_0^2 \cdot R_i$ verbraucht, damit die Leerlaufspannung $U_0 = I_0 \cdot R_i$ aufrecht erhalten werden kann. Für einen Akkumulator wäre dies ein sehr ungeeignetes physikalisches Modell, da er sich "intern" ständig entladen würde.

Beispiele



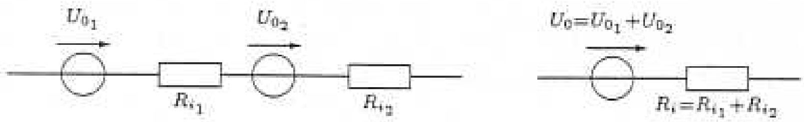
$U_0 = 5\,V,\; I_K = I_0 = 2{,}5\,A$



$I_K = I_0 = 100\,A, U_0 = 20\,V$

$U_0 = I_0 \cdot R_i$

Die Reihenschaltung von Energiequellen



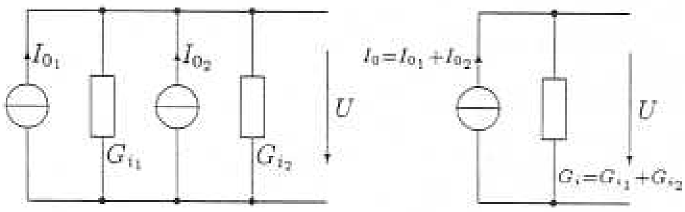
$$U_0 = U_{0_1} + U_{0_2} + \ldots + U_{0_n}, \;\; R_i = R_{i_1} + R_{i_2} + \ldots + R_{i_n}.$$

Die Leerlaufspannungen und die Innenwiderstände addieren sich. Bei Reihenschaltungen von Energiequellen wählt man stets das Modell mit den Spannungsquellen!

Die Parallelschaltung von Energiequellen

$$I_0 = I_{0_1} + I_{0_2} + \ldots + I_{0_n},$$

$$G_i = G_{i_1} + G_{i_2} + \ldots + G_{i_n}.$$



$$I_0 = I_{0_1} + I_{0_2} + \ldots + I_{0_n}, \;\; G_i = G_{i_1} + G_{i_2} + \ldots + G_{i_n}.$$

Die Urströme (Kurzschlußströme) und die Innenleitwerte addieren sich. Bei Parallelschaltungen von Energiequellen wählt man stets das Modell mit den Stromquellen.

Beispiel

Drei Energiequellen mit den angegebenen Werten ihrer Leerlaufspannungen und Innenwiderstände sind zusammengeschaltet, wie links im Bild dargestellt. Gesucht wird eine "Ersatzernergiequelle" mit ihrer Leerlaufspannung und ihrem Innenwiderstand.

Die Schritte sind in der Bildmitte und rechts skizziert. Zunächst werden die beiden in Reihe geschalteten Quellen zu einer Quelle mit der Leerlaufspannung $U_{0_1} + U_{0_2}$ und dem Innenwiderstand $R_1 + R_2$ zusammengefaßt. Die beiden nun parallelgeschalteten Quellen werden durch Stromquellen beschrieben. Sie haben die Kenngrößen

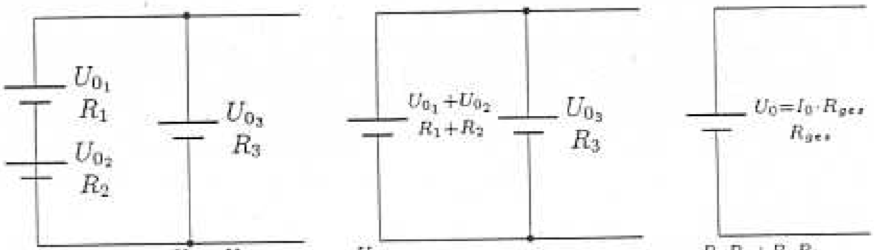
$$I_{0_{1,2}} = \frac{U_{0_1} + U_{0_2}}{R_1 + R_2}, \; G_{1,2} = \frac{1}{R_1 + R_2} \text{ und } I_{0_3} = \frac{U_{0_3}}{R_3}, G_3 = \frac{1}{R_3}.$$

Die Gesamtquelle hat die Werte

$$G_{ges} = G_{1,2} + G_3 = \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3}, \;\; R_{ges} = \frac{1}{G_{ges}},$$

$$I_{0_{ges}} = I_{0_{1,2}} + I_{0_3} = \frac{U_{0_1} + U_{0_2}}{R_1 + R_2} + \frac{U_{0_3}}{R_3}, \;\; U_{0_{ges}} = I_{0_{ges}} \cdot R_{ges}.$$

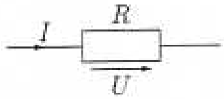
$J = \frac{U}{R}$



$I_{0_{1,2}} = \frac{U_{0_1}+U_{0_2}}{R_1+R_2}$, $I_{0_3} = \frac{U_{0_3}}{R_3}$, $I_0 = I_{0_{1,2}} + I_{0_3}$, $R_{ges} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1+R_2+R_3}$

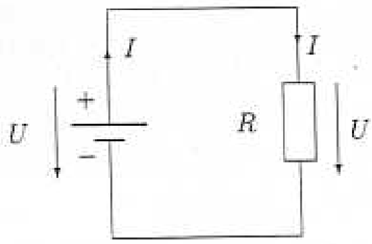
2.2 Leistung und Arbeit bei Gleichstrom

2.2.1 Leistung und Arbeit



Elektrische Leistung bei Gleichstrom:

$$P = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R} \text{ [Watt]}.$$



Bei einem Verbraucher ist $P \geq 0$, wenn das Verbraucherpfeilsystem angewandt wird. Bei einem Energieerzeuger ist entsprechend $P \leq 0$, hier haben U und I eine unterschiedliche Richtung.

$P = U \cdot I < 0$ $\quad$ $P = U \cdot I > 0$

Die während einer Zeit T umgesetzte *Energie* ist

$$W = P \cdot T = U \cdot I \cdot T \text{ [WS], [Joule]}.$$

Das Joulsche Gesetz sagt aus, daß die in einem Widerstand verbrauchte Leistung restlos in Wärme umgesetzt wird. Frühere Einheit: *cal (1 kWh = 860 kcal, 1 Ws =0,24 cal).*

Beispiele

1. Eine nicht fest eingeschraubte Sicherung hat einen Widerstand von 1 Ohm. Welche Wärmemenge entsteht stündlich bei einem Strom von 20 A?
$P = I^2 \cdot R$, $W = I^2 \cdot R \cdot T = 400\,A^2 \cdot 1\,\Omega \cdot 3600\,s = 1{,}44 \cdot 10^6\,Ws = 0{,}4\,kWh.$

2. Die Belastbarkeit eines Widerstandes von 1 $k\Omega$ beträgt 12 W. Wie groß ist der max. zulässige Strom durch diesen Widerstand?

$$P = I^2 R,\ I = \sqrt{\frac{P}{R}} = \sqrt{\frac{12}{1000}} = 109{,}5\,mA.$$

$P = J^2 \cdot R \qquad W = J^2 \cdot R \cdot T$

2.2.2 Der Wirkungsgrad

Die in einem Widerstand verbrauchte Leistung wird vollständig in Wärme umgesetzt. Bei einem Heizofen ist dies erwünscht, es erfolgt eine 100%-tige Ausnutzung der zugeführten Energie. Bei einem Motor soll die el. Energie in mechanische Energie umgesetzt werden. Eine vollständige Umsetzung ist jedoch nicht möglich. Gründe hierfür sind die Wärmeentwicklung in den Wicklungen und auch Reibungsverluste.

Definition des Wirkungsgrades:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{auf}} = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_v}, \quad P_v = \text{Verlustleistung.}$$

Ein Wirkungsgrad $\eta = 0,9$ bedeutet, daß 90% der aufgenommenen Leistung in der gewünschten Form abgegeben wird, 10% sind Verlust.

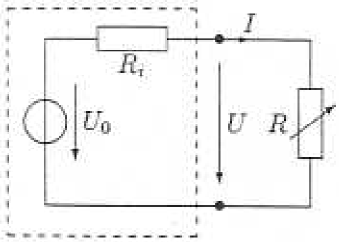
In der Energietechnik kommt es darauf an, η möglichst groß zu machen.

Beispiel: Bei einem Transformator mit 10 MW und einem Wirkungsgrad von 0,99 entstehen noch 0,1 MW = 100 kW Verlustleistung.

In der Nachrichtentechnik ist der Wirkungsgrad meist weniger wichtig, da hier die Informationsübertragung im Vordergrund steht und oft auch nur mit kleinen Leistungen gearbeitet wird.

2.2.3 Die Leistungsanpassung

Fragestellung:
Welche Leistung wird in dem Verbraucherwiderstand R verbraucht? Wie groß ist der Wirkungsgrad? Welche maximale Leistung kann in R verbraucht werden?



Sonderfall $R = 0$:
Dies führt zu $U = 0$, $P_{ab} = 0$ und dem Wirkungsgrad $\eta = 0$.

Sonderfall $R >> R_i$:

$$I = \frac{U_0}{R + R_i} \approx \frac{U_0}{R}, \quad P_{ab} = I^2 R = \frac{U_0^2}{(R + R_i)^2} \cdot R \approx \frac{U_0^2}{R}.$$

$$\text{Verlustleistung:} \quad P_v = I^2 R_i \approx \frac{U_0^2}{R^2} R_i,$$

$$\text{Gesamtleistung:} \quad P_{auf} = P_{ab} + P_v \approx \frac{U_0^2}{R} + \frac{U_0^2}{R^2} R_i = \frac{U_0^2}{R}\left(1 + \frac{R_i}{R}\right),$$

$$\text{Wirkungsgrad:} \quad \eta = \frac{P_{ab}}{P_{auf}} \approx \frac{1}{1 + R_i/R} \to 1, \text{ wenn } R_i << R.$$

Dieser Fall ist in der Energietechnik wichtig.

Sonderfall $R = R_i$:

$$I = \frac{U_0}{2R_i},\ P_{ab} = I^2 \cdot R_i = \frac{U_0^2}{4R_i},\ P_v = I^2 \cdot R_i = \frac{U_0^2}{4R_i},$$
$$P_{auf} = P_{ab} + P_v = 2\frac{U_0^2}{4R_i},\ \eta = 0,5.$$

Bei welchem Wert von R tritt ein Maximalwert der abgegebenen Leistung auf? Es gilt

$$I = \frac{U_0}{R + R_i},\ P = I^2 R = \frac{U_0^2 R}{(R + R_i)^2}.$$

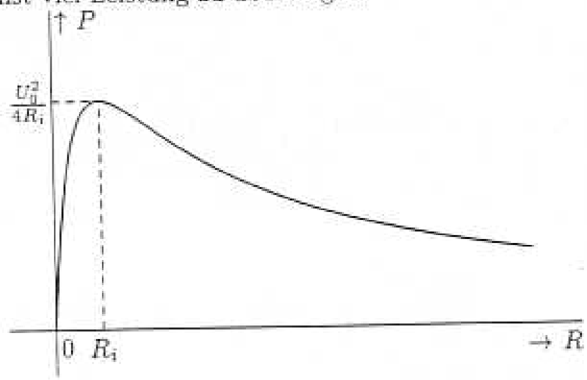
Ableitung nach R mit der Quotientenregel $((u/v)' = (vu' - uv')/v^2)$:

$$\frac{dP}{dR} = U_0^2 \frac{(R + R_i)^2 - R \cdot 2(R + R_i)}{(R + R_i)^4} = U_0^2 \frac{(R + R_i) - 2R}{(R + R_i)^3}.$$

$$\frac{dP}{dR} = 0 \text{ bei } R = R_i,\ P_{max} = \frac{U_0^2}{4R_i}.$$

Die Quelle liefert eine maximale Leistung im Fall $R = R_i$, man spricht von einer *Leistungsanpassung*. Dieser Fall ist in der Nachrichtentechnik sehr bedeutend. Der kleine Wirkungsgrad $\eta = 0,5$ ist nicht so wichtig, es kommt darauf an, möglichst viel Leistung zu übertragen.

In dem Bild ist der Verlauf der abgegebenen Leistung in Abhängigkeit von dem Verbraucherwiderstand aufgetragen.

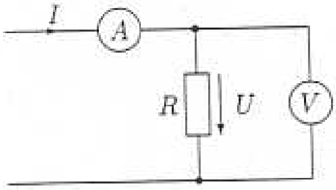


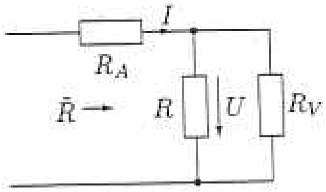
2.3 Die Berechnung einfacher Gleichstromkreise

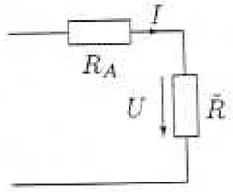
2.3.1 Strom- und Spannungsmessung

Die Aufgabe besteht darin, Strom und Spannung an einem Widerstand R zu messen. Entsprechend dem Ohmschen Gesetz erhält man dann aus den Meßwerten den Wert des Widerstandes $R = U/I$.

Meßanordnung 1:





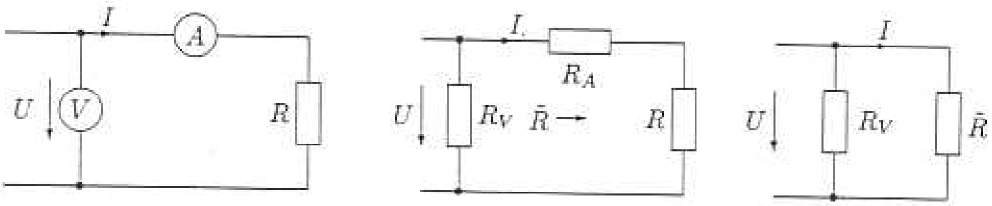


Aus dem linken Bild ist die Anordnung der Meßgeräte erkennbar. Das rechte Bild zeigt die Schaltung, wenn die Meßgeräte durch ihre Widerstände R_A und R_V ersetzt werden. Innnenwiderstände von Strommessern sind i.a. sehr klein, Innenwiderstände von Spannungsmessern hingegen sehr groß. Man erkennt, daß die Spannung mit der vorliegenden Meßschaltung korrekt gemessen wird. Der Strom I ist aber fehlerhaft. I ist nämlich nicht der eigentlich gesuchte Strom durch den Widerstand R, hinzu kommt ein (kleiner) Strom I_V durch das Spannungsmeßgerät. Die Messung des Widerstandes liefert

$$\tilde{R} = \frac{U}{I} = R\frac{R_V}{R + R_V}, \; \tilde{R} \approx R, \text{ wenn } R_V >> R.$$

Wie erwähnt, ist bei Spannungsmeßgeräten der Innenwiderstand R_V i.a. sehr groß, dies gilt insbesonders für digital anzeigende elektronische Meßgeräte.

Meßanordnung 2:



Bei dieser Meßanordnung wird der Strom I genau gemessen. Aus der Ersatzschaltung im rechten Bildteil erkennt man, daß die Spannungsmessung fehlerhaft ist. Die Messung liefert

$$\tilde{R} = \frac{U}{I} = R + R_A, \; \tilde{R} = R, \text{ wenn } R >> R_A.$$

Besonders bei elektronischen Strommessern ist der Innenwiderstand R_A außerordentlich klein.

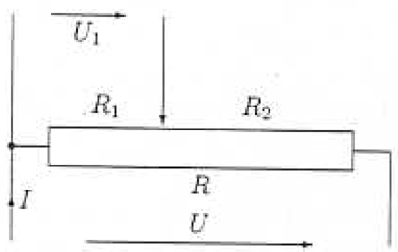
2.3.2 Der Spannungsteiler

Wird eine kleinere, als die vorhandenen Spannung benötigt, so kann man einen *Spannungsteiler* verwenden.

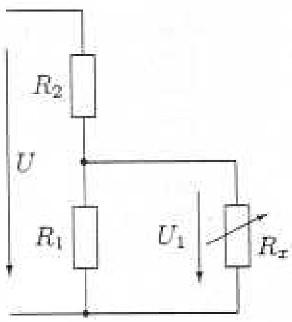
Die Anordnung rechts hat die Funktion eines *Spannungsteilers*. Man erhält die Beziehungen

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2}, \; U_1 = R_1 \cdot I = U\frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Die Beziehung ganz rechts wird *Spannungsteilerregel* genannt. Die "abgegriffene Spannung U_1" entspricht dem Widerstandsverhältnis von R_1 zum Gesamtwiderstand $R = R_1 + R_2$.



Die oben angegebene Spannungsteilerregel gilt nur im *unbelasteten* Zustand. Rechts sind die Verhältnisse an einem mit einem variablen Widerstand R_x belasteten Spannungsteiler dargestellt. Die Schaltung des Spannungsteilers entspricht im übrigen (bis auf den Belastungswiderstand) der Schaltung oben.



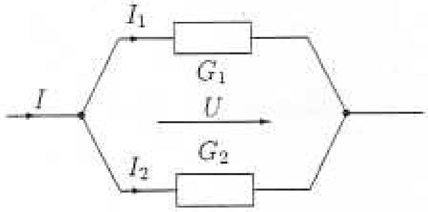
$$U_1 = U \frac{R_1 R_x/(R_1 + R_x)}{R_2 + R_1 R_x/(R_1 + R_x)} =$$
$$= U \frac{R_1 R_x}{R_1 R_x + R_2 R_x + R_1 R_2} = U \frac{R_1}{(R_1 + R_2) + R_1 R_2 / R_x}.$$

Die am Spannungsteiler abgegriffene Spannung ist belastungsabhängig, d.h. abhängig vom Wert R_x. Für $R_x \to \infty$ erhält man aus der Gleichung in der 2. Gleichungszeile die oben abgeleitete Beziehung für den unbelasteten Spannungsteiler.

Beispiel
Ein Spannungsteiler mit den beiden gleichen Widerständen $R_1 = R_2 = 40\,k\Omega$ liegt an einer Spannung von 400 V. Wie groß ist die Spannung U_1 im unbelasteten Fall, bei einem Lastwiderstand von $R_x = 1\,M\Omega$ und einem Lastwiderstand von $R_x = 10\,k\Omega$?
Mit der oben angegebenen Gleichung erhält man im unbelasteten Fall ($R_x = \infty$) die Spannung $U_1 = 200$ V, bei $R_x = 1\,M\Omega$ die Spannung $U_1 = 40/81,6 \cdot 400 = 196,1$ V und bei $R_x = 10\,k\Omega$ die Spannung $U_1 = 1/6 \cdot 400 = 66,7$ V.

2.3.3 Die Stromteilung

Zur einer notwendigen Aufteilung eines Stromes verwendet man eine Parallelschaltung von Leitwerten bzw. Widerständen. Es gilt
$U \cdot G_1 = I_1$, $U \cdot G_2 = I_2$, $U \cdot (G_1 + G_2) = I_1 + I_2 = I$, $U = I/(G_1 + G_2)$. Aus diesen Gleichungen erhält man



$$I_1 = I \frac{G_1}{G_1 + G_2} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$
$$I_2 = I \frac{G_2}{G_1 + G_2} = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}.$$

Diese Beziehungen lassen sich auch auf eine Parallelschaltung von n Leitwerten erweitern, dann gilt

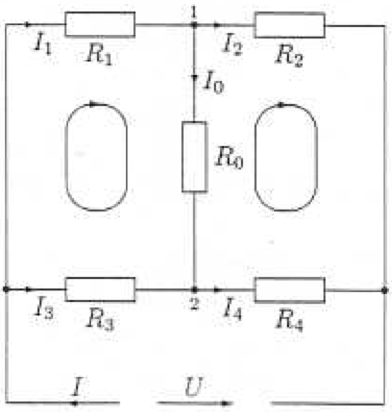
$$I_\nu = I \frac{G_\nu}{G_1 + G_2 + \ldots G_n}.$$

Beispiel
Ein Strom von 1 A soll in zwei Ströme von 1/3 A und 2/3 A aufgeteilt werden. Die Widerstände in der Stromteilerschaltung sollen möglichst groß werden, allerdings darf die max. auftretende Spannung nur 10 V betragen.
Aus $I = U \cdot G = I(G_1 + G_2) = 1\,A$ erhält man bei $U = 10$ V einen Gesamtleitwert von $= 0,1\,\Omega^{-1}$. Aus der geforderten Stromteilung folgt $G_1/G = 1/3$, also $G_1 = 1/30\,\Omega^{-1}$ und entsprechend $G_2 = 2/30\,\Omega^{-1}$. Es müssen also die Widerstände $R_1 = 30\,\Omega$ und $R_2 = 15\,\Omega$ parallelgeschaltet werden.

2.3.4 Die Wheatstonesche Brücke

Brückenschaltungen kommen in der Elektrotechnik in vielfacher Art vor. Die Wheatstonebrücke ist die Grundform.

Man nennt die Brücke *abgeglichen*, wenn der "Brückenstrom" $I_0 = 0$ ist. In diesem Fall tritt zwischen den Punkten 1 und 2 keine Spannung auf, so daß dann an die Stelle von R_0 eine Kurzschlußverbindung treten kann. Bei $I_0 = 0$ können folgende Maschengleichungen aufgestellt werden.



$I_1 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_3 = 0$, $I_2 \cdot R_2 - I_4 \cdot R_4 = 0$. Da $I_0 = 0$ ist, gilt außerdem $I_1 = I_2$ und $I_3 = I_4$. Aus diesen Beziehungen folgt $I_3/I_1 = R_1/R_3$ und $I_3/I_1 = R_2/R_4$ und schließlich die Brückengleichung

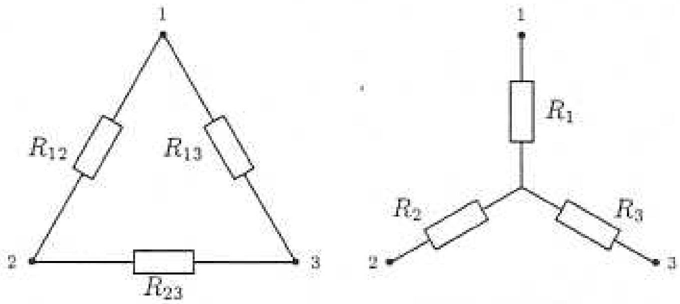
$$\frac{R_1}{R_3} = \frac{R_2}{R_4}.$$

Ist diese Widerstandsbedingung erfüllt, dann ist die Brücke abgeglichen und durch den "Brückenzweig R_0" fließt kein Strom.

Eine wichtige Anwendung der Wheatstoneschen Brücke ist die genaue Messung von Widerständen. Der Widerstandwert von $R_1 = R_x$ soll nicht bekannt sein. Der Widerstand R_3 wird durch einen einstellbaren Präzisionswiderstand ersetzt. Die Widerstände R_2 und R_4 haben feste bekannte Werte. An die Stelle von R_0 tritt ein empfindliches Strom- oder Spannungsmeßgerät. Der Widerstand R_3 wird solange verändert, bis die Brücke abgeglichen ist, also das Meßgerät nichts mehr anzeigt. Dann erhält man aus der oben angegebenen Brückengleichung den unbekannten Widerstandswert $R_x = \frac{R_2}{R_4} \cdot R_3$.

2.3.5 Die Stern-Dreieck-Transformation

Die links skizzierte Schaltung mit den Widerständen R_{12}, R_{13} und R_{23} wird als *Dreiecksschaltung* bezeichnet. Die Schaltung rechts mit den Widerständen R_1, R_2 und R_3 als *Sternschaltung*.



Wenn die Widerstände der Sternschaltung gegeben sind, kann man die Widerstände der Dreieckschaltung so festlegen, daß zwischen den äußeren Klemmen 1-2-3 jeweils gleichgroße Widerstände gemessen werden. Man spricht von einer Stern-Dreieck-Umwandlung. Bei gegebenen Widerstandswerten der Dreieckschaltung lassen sich die Widerstände der Sternschaltung ebenfalls so ermitteln, daß zwischen den Punkten 1-2-3 gleiche Widerstandswerte gemessen werden. Dies wäre dann die Dreieck-Stern-Umwandlung. Ausgangspunkt zur Ermittlung der Umwandlungsgleichungen sind die drei Beziehungen

$$R_1 + R_2 = \frac{R_{12}(R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad R_1 + R_3 = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad R_2 + R_3 = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}.$$

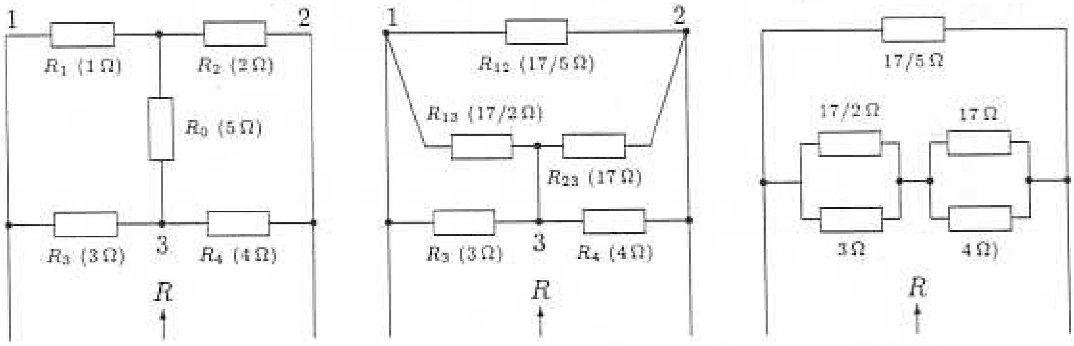
Die 1. Gleichung gibt für beide Schaltungen die Widerstandswerte zwischen den Punkten 1 und 2 an, die 2. Gleichung die zwischen den Punkten 1 und 3 und schließlich die 3. Gleichung die Widerstandswerte zwischen den Klemmen 2 und 3. Nach einigen Umformungen erhält man schließlich die Umwandlungsbeziehungen

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}, \quad R_3 = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{13} + R_{23}},$$

$$R_{12} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_3}, \quad R_{13} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_2}, \quad R_{23} = \frac{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}{R_1}.$$

Beispiel

Der Eingangswiderstand R bei der Schaltung ganz links im Bild soll berechnet werden.



Zunächst wird festgestellt, daß die Brücke (Brückenwiderstand $R_0 = 5\,\Omega$) nicht abgeglichen ist. Damit kann R_0 nicht überbrückt werden und die Berechnung des Eingangswiderstandes R ist mit den bisher behandelten Methoden (Reihen- und Parallelschaltung) nicht möglich. Die Umwandlung der zwischen den Punkten 1-2-3 aufgespannten Sternschaltung in eine Dreieckschaltung ergibt die Schaltung in der Bildmitte bzw. die ganz rechts gezeichnete Schaltung mit dem Eingangswiderstand $R = 2{,}095\,\Omega$.

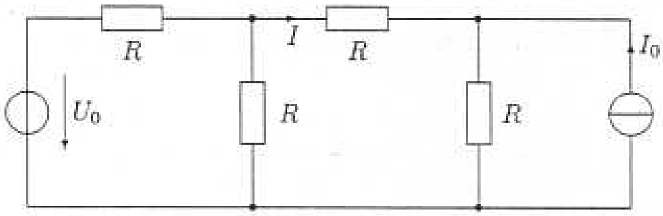
2.3.6 Analysemethoden für Gleichstromnetzwerke

Unter der Analyse eines Netzwerkes versteht man die Berechnung aller Spannungen und Ströme. Grundlage für die Analyse sind die Kirchhoffschen Gleichungen und das Ohmsche Gesetz. Das Problem bei der Analyse liegt nicht so sehr darin, Knoten- und Maschengleichungen aufzustellen, sondern vielmehr darin ein Gleichungssystem mit linear unabhängigen Gleichungen zu gewinnen. Zur Aufstellung solcher Gleichungssysteme existieren im wesentlichen zwei Verfahren. Die Knotenpunktanalyse benötigt bei einem Netzwerk mit k Knoten genau $k - 1$ Gleichungen. Daneben gibt es noch die sogenannte Maschenanalyse, die von Maschengleichungen ausgeht. Im Rahmen dieser Lehrveranstaltung werden die allgemeinen Verfahren nicht besprochen. Wir beschränken uns hier auf die Behandlung des Überlagerungssatzes und des Satzes von der Ersatzspannungsquelle.

2.3.6.1 Der Überlagerungssatz

Bei Netzwerken mit mehr als einer Energiequelle (Strom- oder Spannungsquelle) vereinfacht sich die Berechnung von Strömen und Spannungen in dem Netzwerk, wenn der Überlagerungssatz angewandt wird. Die Anwendbarkeit des Überlagerungssatzes begründet sich in der Linearität der Netzwerke. Auf eine genauere Begründung wird allerdings verzichtet. Wir wollen den Überlagerungssatz an einem Beispiel kennenlernen.

Gegeben ist das rechts skizzierte Netzwerk mit einer Spannungs- und einer Stromquelle. Gesucht wird der in der Schaltung eingezeichnete Strom I.



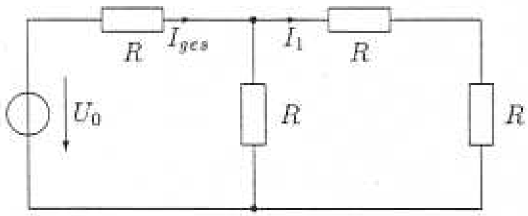
1. Schritt: Die Stromquelle in dem Netzwerk wird entfernt, d.h. es wird $I_0 = 0$ gesetzt.
Wenn eine Stromquelle den Strom $I_0 = 0$ liefert, kann sie offensichtlich auch weggelassen werden. Im 1. Schritt erhalten wir damit die unten dargestellte einfachere Schaltung, die nur noch eine Spannungsquelle enthält. Der zu berechnende Strom wird nun mit I_1 bezeichnet.

Mit dem von der Spannungsquelle aus gesehenen Gesamtwiderstand

$$R_{ges} = R + \frac{R \cdot 2R}{R + 2R} = \frac{5}{3}R$$

erhält man nach dem Stromteilungssatz

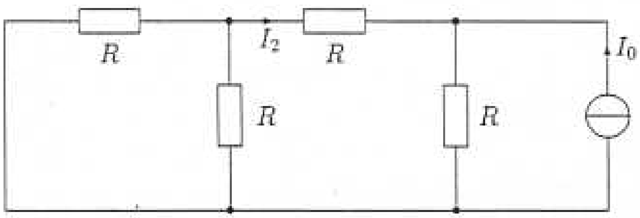
$$I_1 = I_{ges}\frac{R}{3R} = \frac{1}{3}\frac{U_0}{R_{ges}} = \frac{U_0}{5R}.$$



2. Schritt: Die Spannungsquelle in dem Netzwerk wird kurzgeschlossen, d.h. es wird $U_0 = 0$ gesetzt.
Wenn eine Spannungsquelle die Spannung $U_0 = 0$ hat, dann bedeutet dies ein Kurzschluß zwischen den Anschlußklemmen der Spannungsquelle. Im 2. Schritt erhalten wir damit die unten rechts dargestellte einfachere Schaltung mit nur noch der Stromquelle. Der zu berechnende Strom wird jetzt mit I_2 bezeichnet.

Nach dem Stromteilungssatz erhält man, wenn die Stromrichtung von I_2 beachtet wird

$$I_2 = -I_0\frac{R}{R + 1{,}5R} = -\frac{2}{5}I_0.$$



Gesamtlösung:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{U_0}{5R} - \frac{2}{5}I_0.$$

Schlußfolgerung und Verallgemeinerung:
Wird ein Netzwerk durch mehrere Energiequellen gespeist, so kann die Berechnung eines Stromes

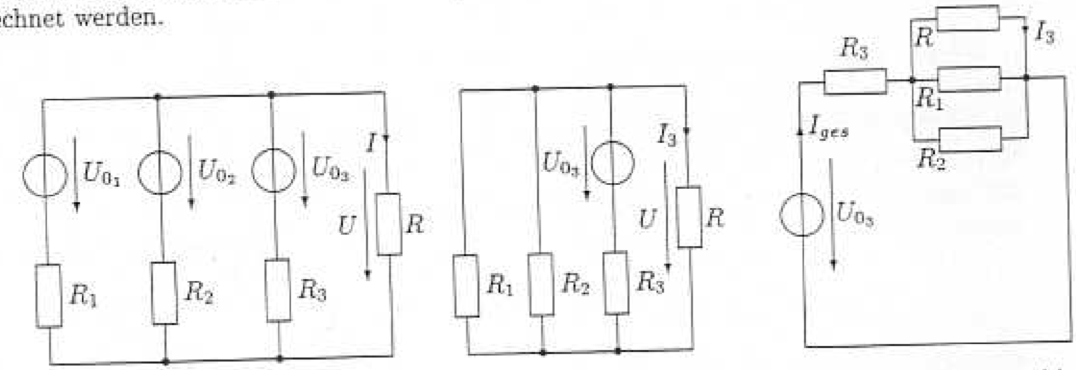
oder einer Spannung in dem Netzwerk folgendermaßen erfolgen:

1. Nacheinander werden alle Quellen - bis auf eine - "weggenommen". Der Strom oder die Spannung, die die verbleibende Quelle hervoruft, wird berechnet.
2. Die nach Punkt 1 berechneten Ströme bzw. Spannungen werden addiert (überlagert).

Bei den Energiequellen soll es sich um Zweipolquellen handeln, wie sie im Abschnitt 2.1.6 eingeführt worden sind. Die Wegnahme von Energiequellen bedeutet den Kurzschluß der Spannungsquellen oder die Entfernung der Stromquellen.

Die Anwendung des Überlagerungssatzes kann bei Netzwerken, die von mehreren Energiequellen gespeist werden, zu einer einfacheren Berechnung führen.

Beispiel
Bei der links unten skizzierten Schaltung soll der Strom I mit Hilfe des Überlagerungssatzes berechnet werden.



Das Bild in der Mitte zeigt die Anordnung, wenn die 1. und 2. Spannungsquelle kurzgeschlossen ist. Der Strom wird nun mit I_3 bezeichnet. Die Schaltung in der Bildmitte kann in die ganz rechts skizzierte Form umgezeichnet werden. Wir erhalten dann (Stromteilersatz)

$$I_3 = I_{ges}\frac{G}{G+G_1+G_2} = I_{ges}\frac{R_1R_2}{R_1R_2+R_1R+R_2R}, \quad I_{ges} = \frac{U_{0_3}}{R_{ges}}$$
$$R_{ges} = R_3 + \frac{1}{G+G_1+G_2} = \frac{R_1R_2R_3+R_1RR_3+R_2RR_3+R_1R_2R}{R_1R_2+R_1R+R_2R}.$$

Daraus folgt

$$I_3 = U_{0_3}\frac{R_1R_2+R_1R+R_2R}{R_1R_2R_3+R_1RR_3+R_2RR_3+R_1R_2R}\cdot\frac{R_1R_2}{R_1R_2+R_1R+R_2R} =$$
$$= U_{0_3}\frac{R_1R_2}{R_1R_2R_3+R_1RR_3+R_2RR_3+R_1R_2R} = U_{0_3}\frac{R_1R_2}{N}.$$

Durch "Symmetrieüberlegungen erhält man beim Kurzschluß der Spannungsquellen 1 und 3

$$I_2 = U_{0_2}\frac{R_1R_3}{N}, \quad I_1 = U_{0_1}\frac{R_2R_3}{N}$$

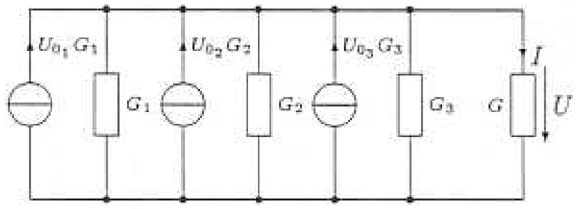
und nach der Überlagerung das Gesamtergebnis

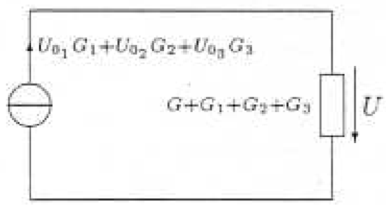
$$I = I_1+I_2+I_3 = \frac{U_{0_1}R_2R_3+U_{0_2}R_1R_3+U_{0_3}R_1R_2}{R_1R_2R_3+R_1RR_3+R_2RR_3+R_1R_2R}, \quad U = I\cdot R.$$

Eine alternative Lösungsmethode:
Schneller und einfacher kommt man zu dem (gleichen) Ergebnis, wenn man dem Rat im Abschnitt 2.1.6 folgt und bei der Parallschaltung von Energiequellen das Modell der Stromquellen wählt. Links unten im Bild ist die oben gegebene Schaltung mit Stomquellen dargestellt, rechts eine Gesamtschaltung mit nur noch einer einzigen Stromquelle. Man erhält dann die Beziehungen

$$U = \frac{U_{0_1}G_1 + U_{0_2}G_2 + U_{0_3}G_3}{G + G_1 + G_2 + G_3}, \quad I = G \cdot U = G\frac{U_{0_1}G_1 + U_{0_2}G_2 + U_{0_3}G_3}{G + G_1 + G_2 + G_3}.$$

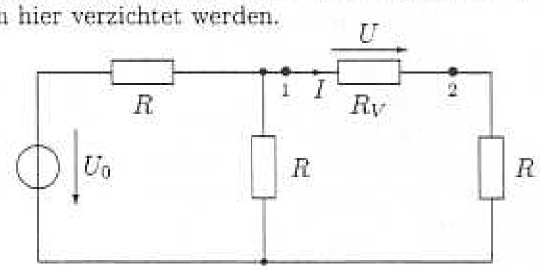
Wenn man diesen Ausdruck mit dem Produkt $RR_1R_2R_3$ erweitert, findet man die vorne ermittelte Beziehung





2.3.6.2 Die Ersatzspannungsquelle

Die Erklärung erfolgt anhand eines einfachen Beispieles. Danach wird die Vorgehensweise im allgemeinen Fall beschrieben. Auf Beweise muß auch hier verzichtet werden.



Bei der nebenstehenden Schaltung soll der Strom durch Widerstand R_v zwischen den Klemmen 1 - 2 berechnet werden.
Von der Quelle her wird ein Widerstand

$$R_{ges} = R + \frac{R(R + R_v)}{2R + R_v} = R\frac{3R + 2R_v}{2R + R_v}$$

gemessen.
Unter der Anwendung des Stromteilersatzes folgt dann

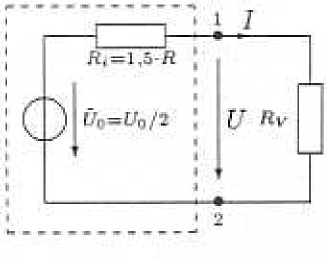
$$I = I_{ges}\frac{R}{2R + R_v} = \frac{U_0}{R_{ges}}\frac{R}{2R + R_v}$$

und daraus schließlich

$$I = \frac{U_0}{3R + 2R_v}.$$

Diese Beziehung kann man folgendermaßen umstellen

$$I = \frac{0,5 \cdot U_0}{1,5 \cdot R + R_v} = \frac{\tilde{U}_0}{R_i + R_v}.$$



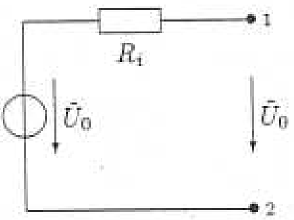
Das Ergebnis kann so interpretiert werden, daß eine *neue Spannungsquelle* mit der Spannung $\tilde{U}_0 = U_0/2$ und einem Innenwiderstand $R_i = 1,5R$ vorliegt, an den der Verbraucherwiderstand angeschlossen ist.

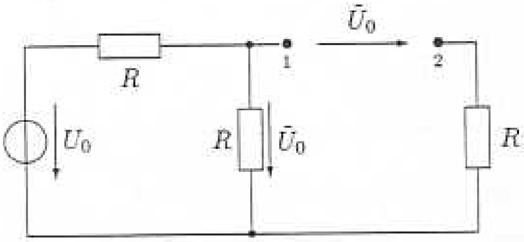
Ergebnis

Will man den Strom in einem Widerstand (oder die Spannung an einem Widerstand) berechnen, so kann das *gesamte übrige Netzwerk* durch eine *Ersatzspannungsquelle* mit einer Urspannung $\tilde{U}_0$ und einem Innenwiderstand R_i ersetzt werden. In der gleichen Weise ist auch der Ersatz des Netzwerkes durch eine *Ersatzstromquelle* möglich.

Wie erhält man die Urspannung $\tilde{U}_0$ der Ersatzspannungsquelle?

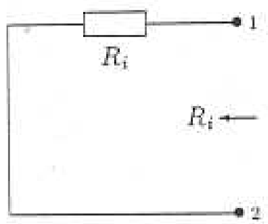
Wie aus der Schaltung links im Bild erkennbar ist, tritt die Urspannung $\tilde{U}_0$ dann auf, wenn kein Stom fließt. Dies bedeutet, daß der Widerstand R_v aus dem Netzwerk entfernt werden muß. Die dann an den Klemmen 1 - 2 auftretende Spannung ist die gesuchte Urspannung. Rechts im Bild sind diese Überlegungen für das im obigen Beispiel behandelte Netzwerk durchgeführt. Nach dem Spannungsteilersatz erhält man $\tilde{U}_0 = U_0/2$.

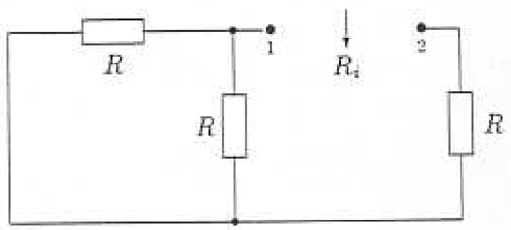




Wie erhält man den Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle?

Aus dem linken Bild ist erkennbar, daß R_i an den Klemmen 1 - 2 gemessen wird, wenn die Spannungsquelle kurzgeschlossen wird. Der rechte Bildteil bezieht sich wieder auf unser Beispiel. Wir erhalten $R_i = R + R/2 = 1,5 \cdot R$.

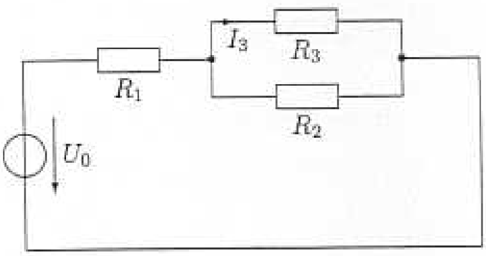


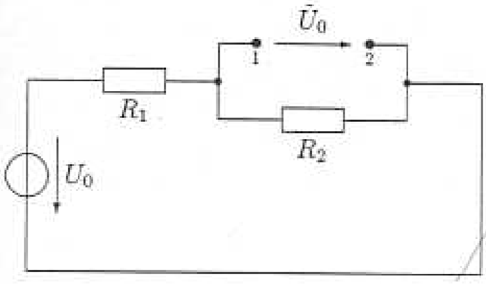


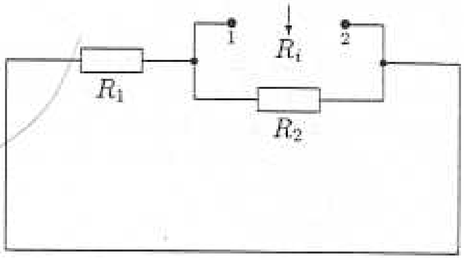
Beispiel 1

Ber der rechts skizzierten Schaltung soll der Strom I_3 mit Hilfe des Satzes von der Ersatzspannungsquelle berechnet werden.

Die einzelnen Schritte sind unten dargestellt. Nachdem R_3 entfernt wurde, kann die eingezeichnete Urspannung $\tilde{U}_0 = U_0 R_2/(R_1 + R_2)$ berechnet werden. Aus der rechten Schaltung folgt $R_i = R_1 R_2/(R_1 + R_2)$.

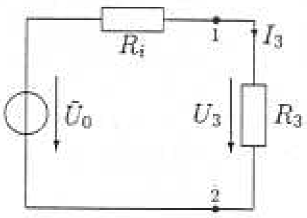






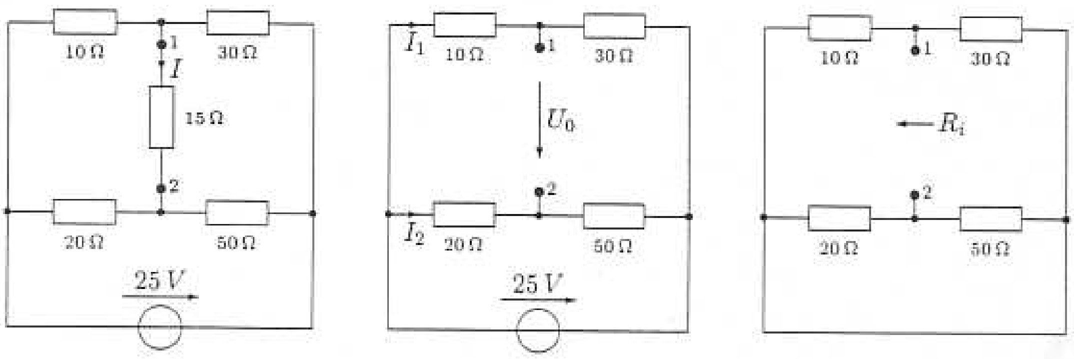
Aus der rechts skizzierten Ersatzspannungsquelle folgt dann

$$I_3 = \frac{\tilde{U}_0}{R_3 + R_i} = \frac{U_0 \frac{R_2}{R_1+R_2}}{R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}} = U_0 \frac{R_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}.$$

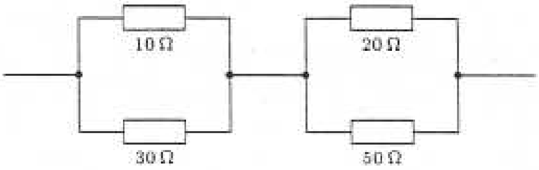


Beispiel 2

Der Strom I in dem Widerstand von $15\,\Omega$ (ganz linke Schaltung) soll mit dem Satz von der Ersatzspannungsquelle berechnet werden.

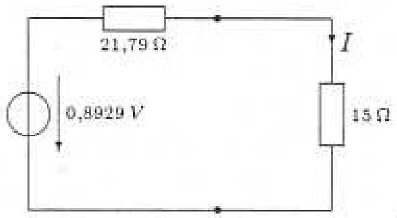


In der Bildmitte ist die Schaltung zur Ermittlung der Urspannung U_0 der Ersatzspannungsquelle skizziert (Wegnahme des Widerstandes!). Die Maschengleichung liefert $I_1 \cdot 10\,\Omega + U_0 - I_2 \cdot 20\,\Omega = 0$. Mit $I_1 = 25\,V/40\,\Omega$ und $I_2 = 25\,V/70\,\Omega$ erhält man $U_0 = 0,8929$ V.



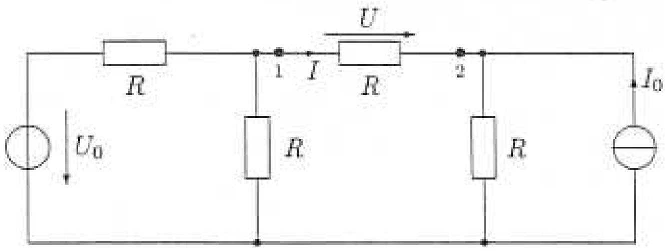
Oben rechts ist die Schaltung zur Berechnung des Innenwiderstandes der Ersatzspannungsquelle dargestellt (Kurzschluß der Spannungsquelle). Durch Umzeichnen findet man die nebenstehende Anordnung und daraus $R_i = 21,79\,\Omega$.
Rechts ist die Ersatzspannungsquelle mit den berechneten Werten dargestellt, Wir erhalten den gesuchten Strom zu

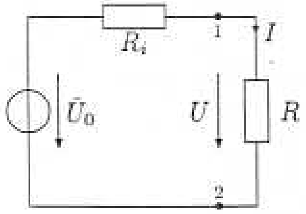
$$I = \frac{U_0}{R + R_i} = \frac{0,8929}{15 + 21,79} = 0,0243\,\text{A}.$$



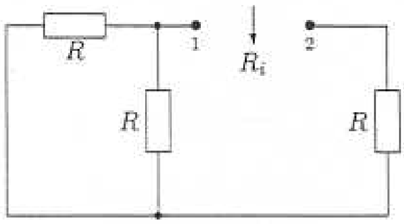
Beispiel 3

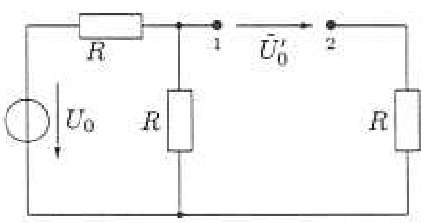
Die Spannung U in der unten links skizzierten Schaltung soll mit dem Satz von der Ersatzspannungsquelle berechnet werden. Rechts im Bild ist die Ersatzspannungsquelle dargestellt.

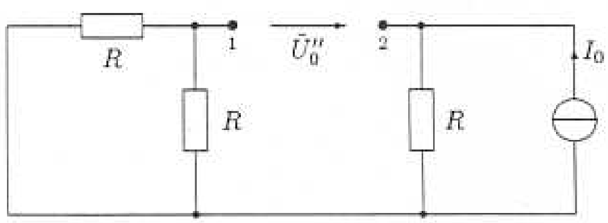




Rechts ist die Schaltung zur Ermittlung von R_i skizziert. Die Spannungsquelle ist kurzzuschließen, die Stromquelle zu entfernen. Man erhält $R_i = 1,5R$.
Da die Schaltung zwei Energiequellen enthält, wird die Urspannung $\tilde{U}_0$ der Ersatzspannungsquelle mit dem Überlagerungssatz berechnet.





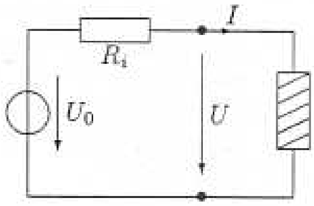


Beim Weglassen der Stromquelle (linkes Bild) wird $\tilde{U}_0' = U_0/2$. Beim Kurzschluß der Spannungsquelle (rechtes Bild) entsteht eine Spannung $\tilde{U}_0'' = -I_0R$. Damit wird $\tilde{U}_0 = U_0/2 - I_0R$. Gemäß der ganz oben rechts dargestellten Ersatzspannungsquelle erhält man schließlich den gesuchten Strom zu

$$I = \frac{\tilde{U}_0}{R_i + R} = \frac{0,5 \cdot U_0 - I_0 \cdot R}{1,5 \cdot R + R} = \frac{U_0}{5R} - \frac{2}{5}I_0.$$

Vergleiche hierzu auch das Ergebnis bei dem einführenden Beispiel im Abschnitt 2.3.6.1.

2.3.7 Einfache nichtlineare Netzwerke



Wir gehen von der rechts skizzierten Grundschaltung mit einem nichtlinearen Widerstand aus. Die Spannung U ergibt sich einmal aus der Beziehung $U = U_0 - I \cdot R_i$ und zum anderen durch den nichtlinearen Zusammenhang $U = f(I)$.

Als Beispiel betrachten wir ein nichtlineares Element mit einer quadratischen Kennlinie $U = k \cdot I^2$. Dann muß gelten

$$k \cdot I^2 = U_0 - I \cdot R_i, \; I^2 + I\frac{R_i}{k} - \frac{U_0}{k} = 0.$$

Diese Gleichung hat die Lösungen

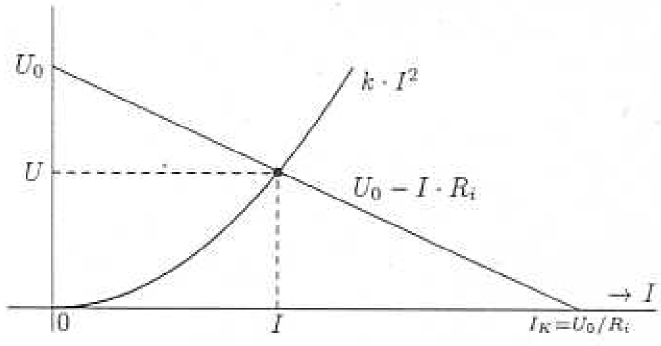
$$I_{1,2} = -\frac{R_i}{2k} \pm \sqrt{\frac{R_i^2}{4k^2} + \frac{U_0}{k}}.$$

Für I kann nur der positive Wert gelten (siehe die Schaltung!), also

$$I = -\frac{R_i}{2k} + \sqrt{\frac{R_i^2}{4k^2} + \frac{U_0}{k}}.$$

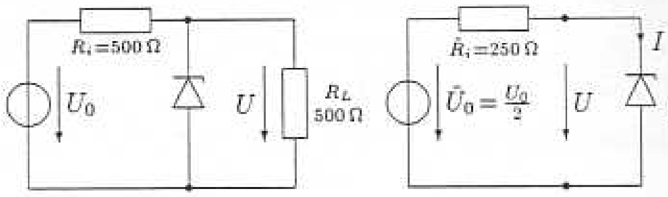
Die Konstante k hat übrigens die Dimension V/A^2.

Im Bild rechts ist eine zeichnerische Lösung dargestellt. Dort sind die Funktionen $U_0 - I \cdot R_i$ und $U = k \cdot I^2$ aufgetragen. Der Schnittpunkt beider Kurven legt die Werte U und I (den *Arbeitspunkt*) fest.



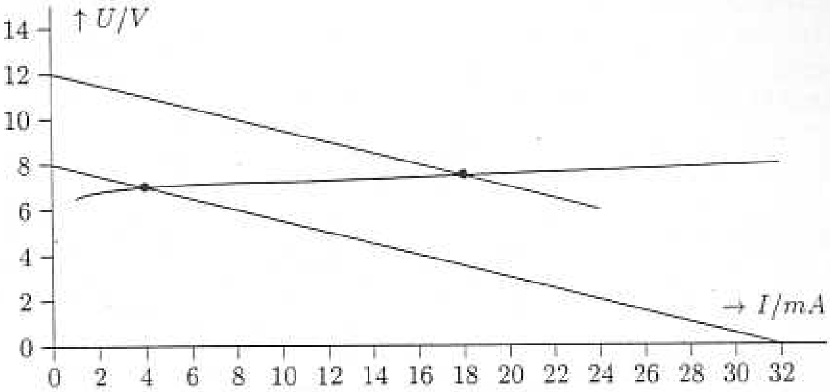
Ein einfaches Anwendungsbeispiel

Im linken Bildteil ist eine Schaltung mit einer sogenannten *Zenerdiode* (siehe auch Abschnitt 4.2) skizziert. Rechts sind einige Punkte der nichtlinearen Kennlinie der Zenerdiode angegeben. Der lineare Schaltungsteil kann durch eine Ersatzspannungsquelle ersetzt werden, wie dies rechts dargestellt ist.



U/V:	6,5	7	7,25	7,5	8
I/mA:	1	4	11	18	32

Die Ersatzspannungsquelle hat die Urspannung $\tilde{U}_0 = U_0/2$ und den Innenwiderstand $R_i = 250\,\Omega$. Im dem Bild unten ist die Kennlinie der Zenerdiode dargestellt und die beiden Arbeitspunkte, die sich bei $U_0 = 16$ V ($\tilde{U}_0 = 8$ V) und $U_0 = 24$ V ($\tilde{U}_0 = 12$ V) einstellen. Bei $\tilde{U}_0 = 8$ V würde man den Kurzschlußstrom $I_K = 8/250 = 32$ mA (siehe Bild) erhalten. Bei $\tilde{U}_0 = 12$ V entsteht ein Kurzschlußstrom von 48 mA.



Man erkennt, daß sich die Spannung an der Zenerdiode, und damit auch die an dem Lastwiderstand R_L nur von 7 V auf etwa 7,5 V (ca. 7%) ändert, wenn die Quellenspannung U_0 im Bereich von 16 bis 24 V (50%) liegt. Diese Schaltung wird in der Praxis als *Spannungskonstanthalter* verwendet.

Anhang A

Aufgabensammlung

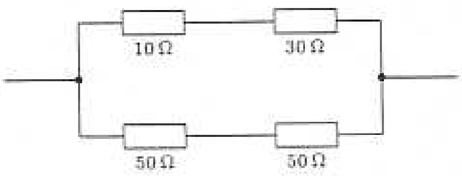
A.1 Aufgaben zum 2. Kapitel

Aufgabe 2.1

Wie groß ist der Widerstand eines 500 m langen Kupferdrahtes mit einem Querschitt von $1,5\,mm^2$?

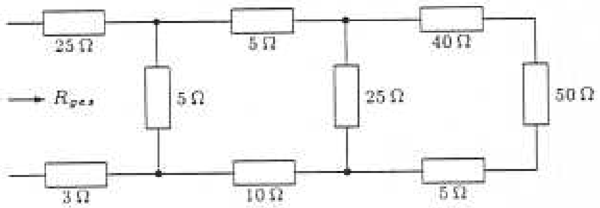
Aufgabe 2.2

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der rechts skizzierten Schaltung.



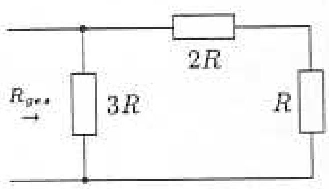
Aufgabe 2.3

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der rechts skizzierten Schaltung.



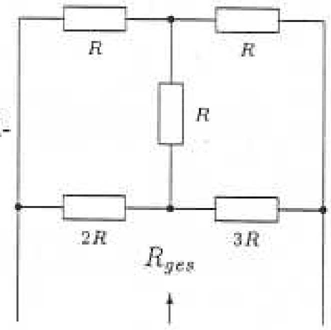
Aufgabe 2.4

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der rechts skizzierten Schaltung.



Aufgabe 2.5

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand der rechts skizzierten Schaltung.

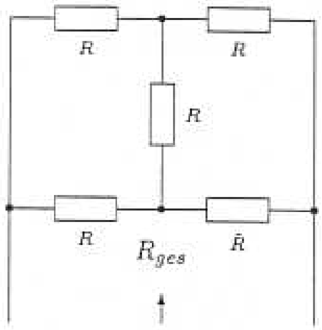


Aufgabe 2.6

Zwei Widerstände $R_1 = 20\,\Omega$ und ein unbekannter Widerstand R_2 sind parallelgeschaltet. Der Gesamtwiderstand hat den Wert $R_{ges} = 12\,\Omega$. Wie groß ist R_2?

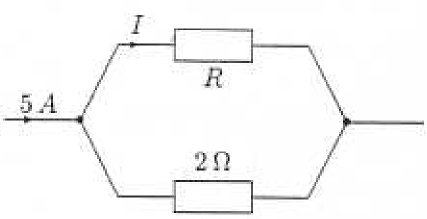
Aufgabe 2.7

Der Wert des Eingangswiderstandes R_{ges} soll für $\tilde{R} = 2R$ und $\tilde{R} = R$ berechnet werden.
Hinweis: Im Fall $\tilde{R} = R$ ist kann die Rechnung wesentlich einfacher durchgeführt werden. Führen Sie diese einfachere Berechnung durch!



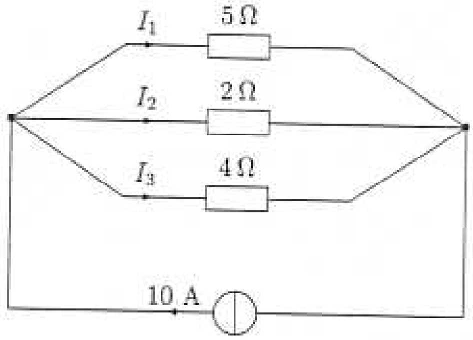
Aufgabe 2.8

Berechnen Sie den Wert von R so, daß der durch ihn fließende Strom $I = 3$ A beträgt.



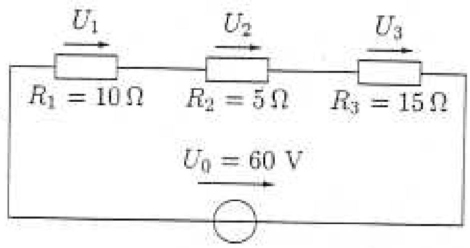
Aufgabe 2.9

Berechnen Sie die drei durch die Widerstände fließenden Ströme I_1, I_2 und I_3.



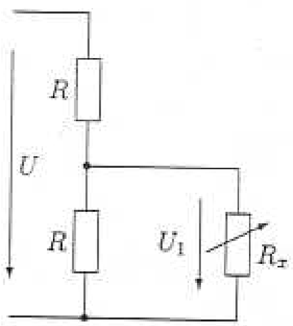
Aufgabe 2.10

Berechnen Sie die Spannungen U_1, U_2 und U_3, zunächst allgemein und dann mit den Zahlenwerten.



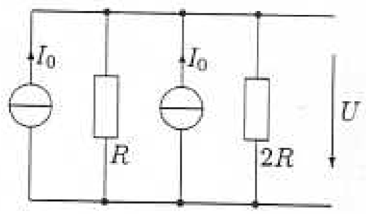
Aufgabe 2.11

Berechnen Sie das Spannungsverhältnis U_1/U. Welche Werte erhält man im Fall $R_x = 0$, $R_x = R/2$, $R_x = R$, $R_x = 2R$ und $R_x = \infty$?



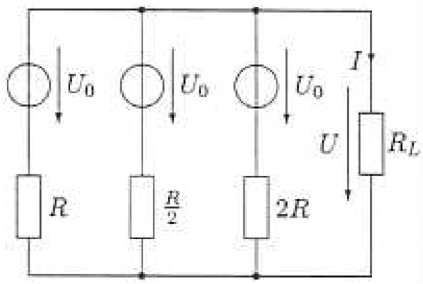
Aufgabe 2.12

Ermitteln Sie zu der rechts skizzierten Schaltung eine äquivalente Eratzspannungsquelle.



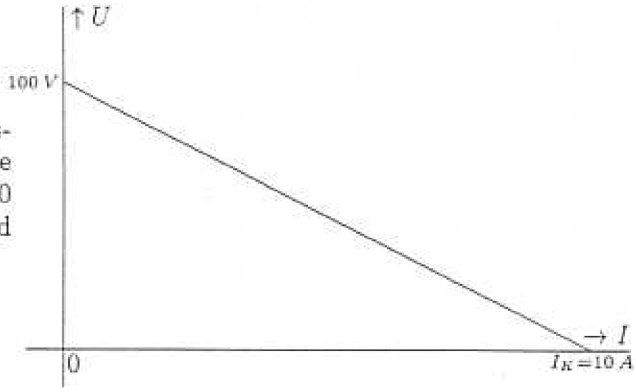
Aufgabe 2.13

Ersetzen Sie die drei parallelgeschalteten Spannungsquellen durch eine einzige Spannungsquelle. Berechnen Sie anschließend den durch den Lastwiderstand R_L fließenden Strom und die an ihm abfallende Spannung.



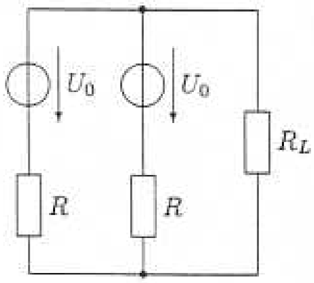
Aufgabe 2.14

Das Bild zeigt die Spannungs-Stromkennlinie einer Stromquelle mit dem Kurzschlußstrom $I_K = 10$ A. Geben Sie ein Ersatzschaltbild für die Stromquelle an.



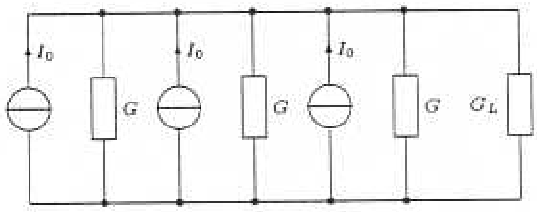
Aufgabe 2.15

Wie groß muß der Lastwiderstand R_L in der nebenstehenden Schaltung sein, damit in ihm eine maximale Leistung verbraucht wird. Berechnen Sie diese maximale Leistung bei $U_0 = 10$ V und $R = 600\,\Omega$.



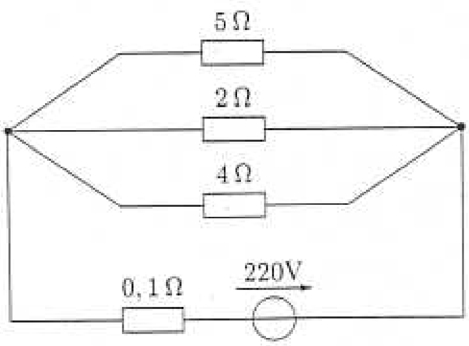
Aufgabe 2.16

Geben Sie eine Ersatzstromquelle für die drei parallelgeschalteten Stromquellen an.
Wie groß muß der Leitwert G_L sein, damit in ihm eine maximale Leistung verbraucht wird?



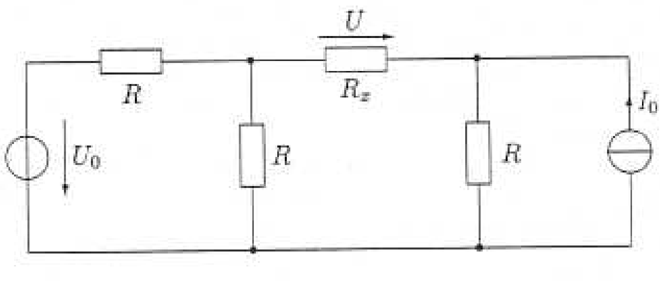
Aufgabe 2.17

Drei Verbraucher sind parallel an eine Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand von $0,1\,\Omega$ angeschlossen. Berechnen Sie die in den einzelnen Verbraucherwiderständen verbrauchten Leistung und den Wirkungsgrad.



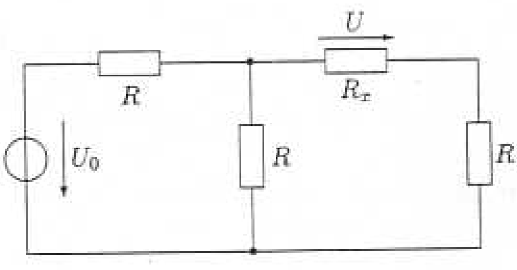
Aufgabe 2.18

Berechnen Sie die an dem Widerstand R_x anliegende Spannung mit Hilfe des Überlagerungssatzes. Wie groß ist U im Falle $U_0 = 10$ V, $I_0 = 5$ A, $R_x = R = 5\,\Omega$?



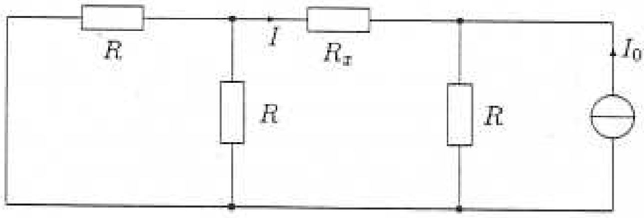
Aufgabe 2.19

Berechnen Sie die an dem Widerstand R_x anliegende Spannung mit Hilfe des Satzes von der Ersatzspannungsquelle. Berechnen Sie die Spannung speziell bei den Werten $U_0 = 10$ V, $R = 10\,\Omega$. Wie groß ist in diesem Fall die max. in R_x umsetzbare Leistung?



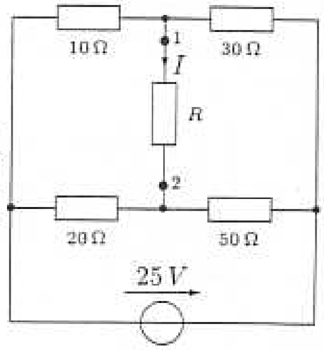
Aufgabe 2.20

Berechnen Sie den durch den Widerstand R_x fließenden Strom zunächst mit Hilfe des Satzes von der Ersatzspannungsquelle und dann mit dem Stromteilungssatz. Wie groß ist I bei $R_x = R = 10\,\Omega$ und $I_0 = 5$ A?



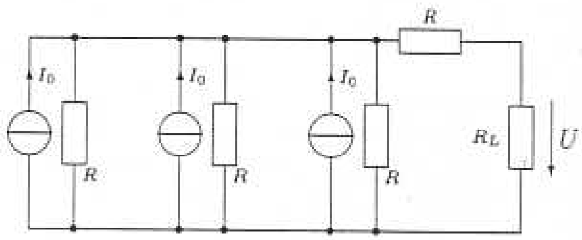
Aufgabe 2.21

Der Strom durch den Widerstand R soll berechnet werden. Zu diesem Zweck soll das Netzwerk bezüglich der Klemmen 1-2 durch eine Ersatzspannungsquelle ersetzt werden. Wählen Sie den Widerstand R so groß, daß in ihm eine max. Leistung verbraucht wird und berechnen Sie dann den Strom I.

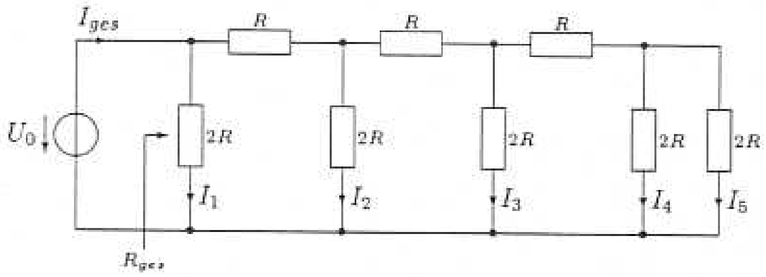


Aufgabe 2.22

Die Spannung U an dem Lastwiderstand R_L soll zunächst mit dem Überlagerungssatz berechnet werden. Anschließend soll eine Ersatzspannungsquelle für das Netzwerk angegeben werden.



Aufgabe 2.23

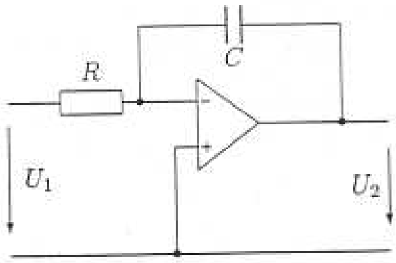


Berechnen Sie die in der Schaltung eingezeichneten Ströme.

Hinweis: Ermitteln Sie zunächst R_{ges}, dann I_{ges} und danach schrittweise die andern Ströme mit dem Stromteilungssatz.

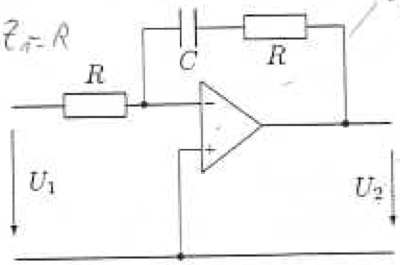
Aufgabe 3.26

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$ der nebenstehenden Schaltung.



Aufgabe 3.27

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$ der nebenstehenden Schaltung.



$\frac{1}{j\omega C}$

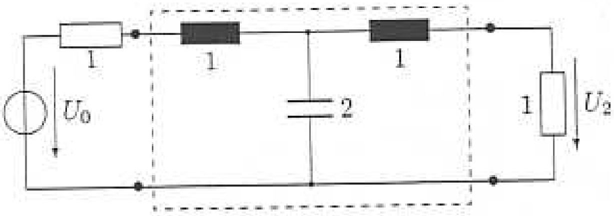
$Z_1 = R$

Z_f $-\frac{Z_f}{Z_1}$

$\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}+R}{R}$

Aufgabe 3.28

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_0$ der nebenstehenden Schaltung. Bei den Bauelementewerten handelt es sich um normierte Größen.



A.3 Lösungen in Kurzform

2.1 $R = 5,667\,\Omega$

2.2 $R_{ges} = 28,57\,\Omega$

2.3 $R_{ges} = 32,375\,\Omega$

2.4 $R_{ges} = 1,5\,R$

2.5 $R_{ges} = 1,421 \cdot R$ (Stern-Dreieck-Umwandlung)

2.6 $G_2 = G_{ges} - G_1 = 1/12 - 1/20 = 1/30$, $R_2 = 30\,\Omega$

2.7 $\tilde{R} = 2R$: $R_{ges} = 1,182 \cdot R$ (Stern-Dreieck-Umwandlung),

$\tilde{R} = R$: $R_{ges} = R$ (abgeglichene Brücke)

2.8 $R = \frac{4}{3}\,\Omega$

2.9 $I_1 = 2,105$ A, $I_2 = 5,263$ A, $I_3 = 2,632$ A

2.10 $U_1 = \frac{1}{3}U_0$, $U_2 = \frac{1}{6}U_0$, $U_3 = \frac{1}{2}U_0$, $U_1 = 20$ V, $U_2 = 10$ V, $U_3 = 30$ V

2.11 $\frac{U_1}{U} = \frac{1}{2+R/R_x}$

$R_x = 0$: $\frac{U_1}{U} = 0$, $R_x = \frac{R}{2}$: $\frac{U_1}{U} = \frac{1}{4}$, $R_x = R$: $\frac{U_1}{U} = \frac{1}{3}$, $R_x = 2R$: $\frac{U_1}{U} = 0,4$, $R_x = \infty$: $\frac{U_1}{U} = \frac{1}{2}$

2.12 $U_0 = \frac{4}{3}I_0R$, $R_i = \frac{2}{3}R$

2.13 $\tilde{U}_0 = U_0$, $\tilde{R}_i = \frac{2}{7}R$, $I = \frac{\tilde{U}_0}{2R/7+R_L}$, $U = R_L\frac{U_0}{2R/7+R_L}$

2.14 $I_0 = 10$ A, $R_i = 10\,\Omega$

2.15 $R_L = R/2$, $P_{max} = 0,0833$ W

2.16 $\tilde{I}_0 = 3I_0$, $\tilde{G}_i = 3G$, $G_L = 3G$

2.17 $R_{ges} = 1,1526\,\Omega$, $I_{ges} = 190,86$ A,

$I_{5\Omega} = 40,18$ A, $P_{5\Omega} = 8073,3$ W, $I_{2\Omega} = 100,46$ A, $P_{2\Omega} = 20183,1$ W,

$I_{4\Omega} = 50,23$ A, $P_{4\Omega} = 10091,5$ W, $P_{ab} = 38347,8$ W, $P_v = 3643$ W, $\eta = 0,913$

2.18 $U = U_0\frac{R_x}{3R+2R_x} - I_0\frac{2RR_x}{3R+2R_x}$, $R_x = R$: $U = \frac{1}{5}U_0 - \frac{2}{5}I_0R = -8$ V

2.19 $\tilde{U}_0 = \frac{1}{2}U_0$, $\tilde{R}_i = \frac{3}{2}R$, $U = \tilde{U}_0\frac{R_x}{\tilde{R}_i+R_x}$, $U = 5\,V\,\frac{R_x}{15\,\Omega+R_x}$, $P_{max} = 0,417$ W

2.20 $\tilde{U}_0 = -I_0R$, $\tilde{R}_i = \frac{3}{2}R$, $I = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{R}_i+R_x}$, $I = -2$ A, Stromteilung: $I = -I_0\frac{R}{3R/2+R_x}$

2.21 $\tilde{U}_0 = 0,8929$ V, $\tilde{R}_i = 21,79\,\Omega$, $I = 20,5$ mA

2.22 $U = I_0R\frac{3R_L}{4R+3R_L}$, $\tilde{U}_0 = I_0R$, $\tilde{R}_i = \frac{4}{3}R$

2.23 $R_{ges} = R$, $I_{ges} = \frac{U_0}{R}$, $I_1 = I_{ges}/2 = \frac{U_0}{2R}$, $I_2 = I_1/2 = \frac{U_0}{4R}$, $I_3 = I_2/2 = \frac{U_0}{8R}$, $I_4 = I_3/2 = \frac{U_0}{16R}$, $I_5 = I_4 = \frac{U_0}{16R}$.

3.1 a) $2\,10^{-3}$ As, b) $U_2 = 100$ V, $C_{ges} = 6,667\,\mu F$, $U_{ges} = 300$ V, c) $C_{ges} = 15\,\mu F$, $Q_{ges} = 3\,10^{-3}$ As

3.2 $U = U_1 + U_2 = 1000$ V, $Q_{12} = 0,0375$ As, $U_1 = 750$ V, $U_2 = 250$ V

3.3 $i(t) = -12,566\,\sin(\omega t)$

3.4 $i(t) = 2\,\cos(\omega t)$, $I = \sqrt{2}$, $I_{eff} = \sqrt{2}$, $P = 10$,

$i(t) = -2\,\cos(\omega t)$, $I = \sqrt{2}e^{j\pi}$, $I_{eff} = \sqrt{2}$, $P = 10$,

$i(t) = 5\,\cos(\omega t - \pi/3)$, $I = 3,536e^{-j\pi/3}$, $I_{eff} = 3,536$, $P = 62,5$,

$i(t) = -5\,\cos(\omega t + \pi/6)$, $I = 3,536e^{j7\pi/6}$, $I_{eff} = 3,536$, $P = 62,5$,

$i(t) = \sin(\omega t)$, $I = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-j\pi/2}$, $I_{eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $P = 2,5$,

$i(t) = 0,5\,\cos(\omega t + \pi)$, $I = 0,3536e^{j\pi}$, $I_{eff} = 0,3536$, $P = 0,625$,

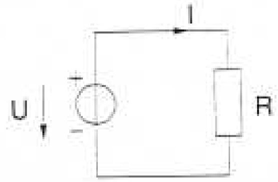
2 Grundlagen der Gleichstromtechnik

2.1 Lineare Gleichstromkreise

2.1.1 Stromkreis, Stromstärke

Ein elektrischer Stromkreis besteht immer aus:

Erzeuger,
Verbraucher sowie
Hin-und Rückleitungen.



Je nach Beweglichkeit der Ladungsträger unterscheidet man:

Leiter	*Halbleiter*	*Nichtleiter* (Isolierstoffe)
Metalle und Kohle Säuren und Basen	vorwiegend Silizium, Germanium	Gummi, Papier, Kunststoff, Porzellan, Luft, Vakuum = idealer Nichtleiter

Stromstärke: Die transportierte Ladungsmenge pro Zeiteinheit bezeichnet man als elektrische Stromstärke I. [I] = A

$$I = \frac{Q}{t}$$

wobei Q = Ladungsmenge
[Q] = As

Die Gleichung $I = \frac{Q}{t}$

gilt nur für einen zeitlich konstanten Strom ==> *Gleichstrom*

Bei einem von der Zeit abhängigen Strom gilt: $I = \frac{dQ}{dt}$

Kleinste elektrische Ladungsmenge (Elektron): $e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$

In Metallen gibt es etwa $n \approx 10^{23}$ freie Elektronen pro $1\,\mathrm{cm}^3$

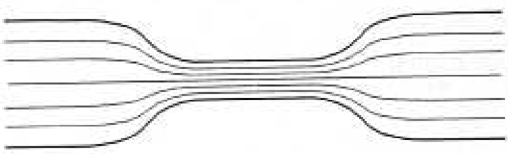
Jeder cm^3 Metall enthält deshalb eine Elektrizitätsmenge (Ladungsmenge) von $n \cdot e$ pro cm^3.

Ein Leiter der Länge l und des Querschnittes A enthält deshalb
die Elektrizitätsmenge $Q = n \cdot e \cdot l \cdot A \quad = n \cdot e \cdot V$

2.1.2 Die Stromdichte

$$S = \frac{I}{A}$$

$$[S] = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$



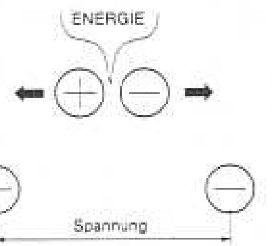
bei gleichmäßiger Verteilung des Stromes auf den gesamten zur Verfügung stehenden Querschnitt A

$$S = \frac{I}{A} = \frac{Q}{t \cdot A} = \frac{n \cdot e \cdot A \cdot l}{t \cdot A} = n \cdot e \cdot v$$

wobei v = mittlere Strömungsgeschwindigkeit. (Durchschnittliche Elektronengeschwindigkeit: $v = 0,1 ... 10 \frac{mm}{s}$.

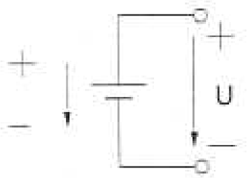
2.1.3 Die elektrische Spannung

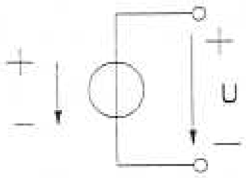
Die elektrische Größe, die das Fließen des Stromes verursacht, ist die Spannung.



Spannung entsteht durch Trennung von Ladungen und beinhaltet das Ausgleichsstreben der Ladungen.
$[U] = V$

Übliche Schaltzeichen einer Spannungsquelle:



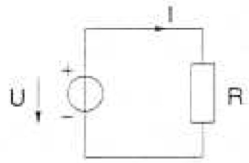


Richtung einer Spannungsquelle: vom Pluspol (+) zum Minuspol (-).
Die Stromrichtung entspricht der Bewegung der positiven Ladungsträger.

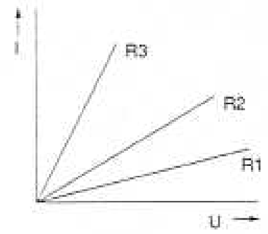
Einige Werte: Zelle eines Bleiakkumulators: $U = 2V$, Trockenbatterie: $1,5V$ (Bleistiftform), Flachbatterie: $U = 4,5V$, große Generatoren: $U = 10kV = 10000V$, Überlandleitungen: $U = 100kV - 800kV$.

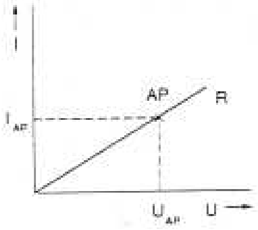
2.1.4 Das Ohmsche Gesetz

Strom und Spannung sind in einem Stromkreis in bestimmter Weise voneinander abhängig.
Es gilt: $U = I \cdot R$
wobei R elektrischer Widerstand oder Ohm'scher Widerstand genannt wird.



Ist R unabhängig von Strom und Spannung, so bezeichnet man ihn als *linearen* Leiter. Seine Kennlinie ist eine Gerade.
Widerstandskennlinien für verschiedene lineare Widerstände:
Die Linien sind Geraden mit der Steigung: $\frac{\Delta I}{\Delta U} = m = \text{konst.} = \frac{1}{R}$





Bei Anlegen einer bestimmten Spannung fließt nach dem Ohmschen Gesetz ein ganz bestimmter, dazugehörender Strom. Der sich aus Spannungswert und Stromwert ergebene Punkt heißt im Widerstandsdiagramm: *Arbeitspunkt* (AP). Im Prinzip kann jeder Punkt der Widerstandsgeraden AP sein.

Da bei gleichbleibender angelegter Quellspannung das Produkt $U = I \cdot R$ konstant sein muß, hat der elektrische Widerstand eine *strombegrenzende Wirkung*.

Aus $R = \frac{U}{I}$ folgt für $[R] = \frac{V}{A} = \Omega$ (Ohm).

Der menschliche Körperwiderstand bewegt sich zwischen 1kΩ und 100kΩ.

Ströme über 50mA sind lebensgefährlich => mehr als 50V nicht mit den Händen anfassen! (Schutzmaßnahmen in VDE 0100, 0140, 0141.)

Kehrwert des Widerstandes: **Leitwert** $\frac{1}{R} = G$ $[G] = \frac{1}{\Omega} = S =$ (Siemens)

Man unterscheidet zwischen
- gewolltem Widerstand (= technischer Widerstand oder Verbraucher) und
- ungewolltem Widerstand (=Leitungen, Kontakte).

2.1.5 Spezifischer Widerstand und Leitfähigkeit

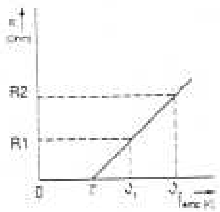
Es gilt: $R = \frac{\rho \cdot l}{A}$ l = Länge des Leiters; A = Querschnitt des Leiters
ρ = spezifischer Widerstand (Materialkonstante)

Für Kupfer: $\rho_{CU} = 0,01786\Omega \cdot \frac{mm^2}{m}$; für Eisen: $\rho_{FE} = 0,15\Omega \cdot \frac{mm^2}{m}$

Der Kehrwert von ρ heißt spezifische Leitfähigkeit κ. $\kappa = \frac{1}{\rho}$ $\Rightarrow$ $R = \frac{l}{\kappa \cdot A}$

2.1.6 Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Bei den meißten Metallen nimmt der elektr. Widerstand mit steigender Temperatur zu.
Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes kann über einen weiten Bereich ($\Delta\vartheta = 200K$) durch einen linearen Ansatz genähert werden.



R_1 = Widerstand bei der Anfangstemperatur ϑ_1 Mit $\vartheta_2 - \vartheta_1 = \Delta\vartheta$

R_2 = Widerstand bei der Endtemperatur ϑ_2 α = Temperaturkoeffizient, TK

$$R_2 = R_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\vartheta)$$

Oft wird für $\vartheta_1 = 20°$ angenommen => $\alpha = \alpha_{20}$.

Bei Abnahme des elektrischen Widerstandes mit steigender Temperatur => negativer Temperaturkoeffizient.

Beispiel: Kupfer:

$\alpha_{20Cu} = 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot K^{-1}$ oder $= 3,9 \cdot 10^{-3} \cdot grd^{-1}$ oder $= 3900 ppm \cdot K^{-1}$
Konstantan (negativ): $\alpha_{20} = -0,0035 \cdot 10^{-3} \cdot grd^{-1}$

2.1.7 Arbeit und Leistung

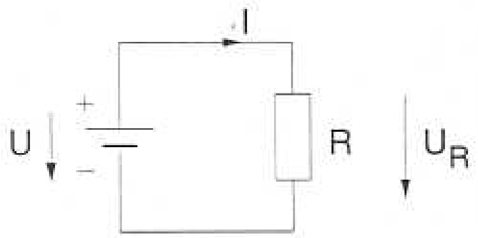
Wird infolge einer elektrischen Spannung eine Elektrizitätsmenge oder Ladungsmenge Q bewegt, so wird *elektrische Arbeit* verrichtet.

$$W = U \cdot Q = U \cdot I \cdot t \qquad [W] = A \cdot Vs = Ws$$

Die elektrische Leistung ist Arbeit je Zeiteinheit, d.h.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{U \cdot Q}{t} = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

Wird das *Verbraucherpfeilsystem* angewandt, ist an einem *Verbraucher* $P \geq 0$.
Bei einer Quelle gilt: $P \leq 0$, da U und I unterschiedliche Richtungen haben.

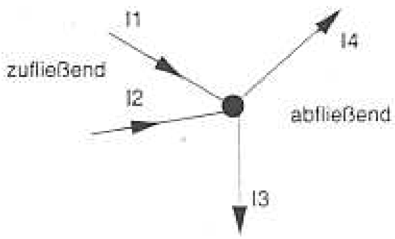


2.2 Die Kirchhoffschen Regeln

2.2.1 Knotenpunktregel (Regel 1, Stromregel)

Knoten: mindestens zwei Verbindungsleitungen treffen zusammen.

Zweig: Verbindungsstrecke zwischen zwei Knoten im elektrischen Netzwerk

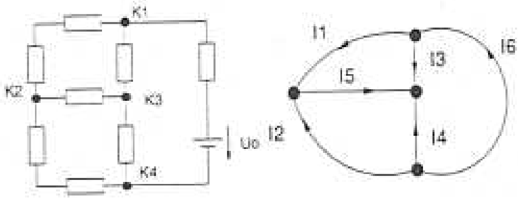


Die Summe der auf einen Knoten zufließenden Ströme = der Summe der abfließenden Ströme.

$$\sum I_{zu} = \sum I_{ab}$$

hier: $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$; oder: $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{v=1}^{n} I_v = 0$ (vorzeichenbehaftet)

Bemerkung: Im folgenden Beispiel werden die zufließenden Ströme ***positiv****, die abfließenden* ***negativ*** *angenommen. Man kann aber auch die abfließenden Ströme* ***positiv*** *und die zufließenden* ***negativ*** *ansetzen. Dies bedeutet lediglich eine Multiplikation auf beiden Seiten der Knotengleichungen mit dem Faktor -1.*



K1	+I6	-I1		-I3			= 0
K2		+I1	+I2			-I5	= 0
K3				+I3	+I4	+I5	= 0
K4	-I6		-I2		-I4		= 0

Jeder Strom tritt einmal positiv und einmal negativ auf. Gleichung für K4 kann deshalb ohne Kenntnis des Netzwerkes aufgeschrieben werden.

Ergebnis: Bei einem Netzwerk mit **n** Knoten gibt es **n-1** *linear unabhängige* Knotengleichungen.

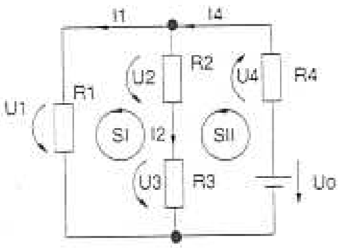
2.2.2 Schleifenregel (Maschenregel, Regel 2, Spannungsregel)

Schleife, Masche: geschlosener Weg im Netzwerk

Jeder Schleife kann eine Umlaufrichtung (beliebig) zugeordnet werden. Es gilt:

Die vorzeichenbehaftete Summe aller in einer Schleife (Masche) auftretenden Quellspannungen und Spannungsabfälle = 0 $\sum_{v=1}^{n} U_v = 0$

Beispiel:



Verbraucherpfeilsystem:
U und I sollen am Verbraucher gleiche Richtung haben.

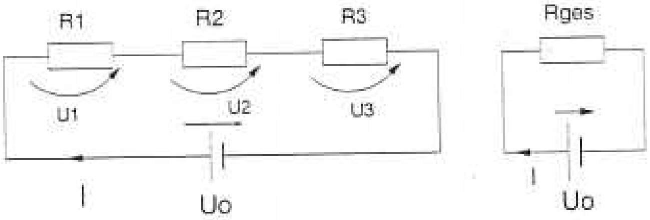
SI: $U1 - U3 - U2 = 0$;

SII: $U2 + U3 - U_0 + U4 = 0$

2.3 Einfache Gleichstromkreise

2.3.1 Zusammenschaltung von Widerständen

1. Reihenschaltung:



Schleifengleichung:

$U1 + U2 + U3 - U_0 = 0$

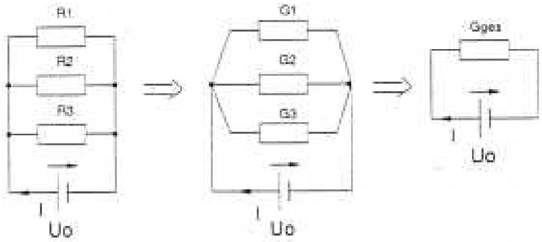
Ohm'sches Gesetz:

$U1 = I \cdot R1;\quad U2 = I \cdot R2;\quad U3 = I \cdot R3$

$\Rightarrow\quad I(R1 + R2 + R3) = U_0;\qquad I \cdot R_{ges} = U_0$ mit $R_{ges} = R1 + R2 + R3$

Reihenschaltung: $R_{ges} = R1 + R2 + R3 + \ldots . + Rn$

2. Parallelschaltung:



Knotenpunktregel:

$I1 + I2 + I3 = I$

Ohmsches Gesetz:

$I1 = U_0 \cdot G1;\quad I2 = U_0 \cdot G2;\quad I3 = U_0 \cdot G3$

$\Rightarrow\quad I1 + I2 + I3 = I \;=\; U_0(G1 + G2 + G3) \;=\; U_0 \cdot G_{ges} \;\Rightarrow\; G_{ges} = G1 + G2 + G3$

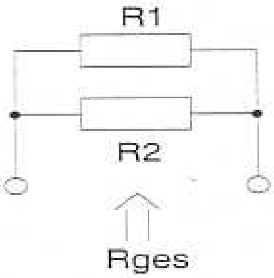
Parallelschaltung: $G_{ges} = G1 + G2 + G3 + \ldots + G_n$

oder mit $G = \frac{1}{R}$

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} + \ldots + \frac{1}{R_n} = G_{ges}$$

Beispiel:

Parallelschaltung von zwei Widerständen:

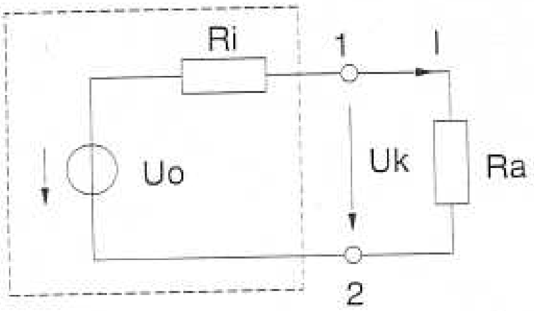


$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} \quad = \frac{R1 + R2}{R1 \cdot R2}$$

$$R_{ges} = \frac{R1 \cdot R2}{R1 + R2}$$

2.3.2 Klemmspannung, Leerlaufspannung

Jede *reale* Spannungsquelle besitzt einen *inneren* Widerstand:



Bei Belastung der realen Spannungsquelle durch einen Widerstand (R_a) sinkt die Spannung zwischen den Klemmen 1 und 2.

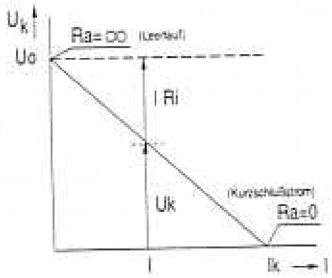
$U_k = U_0 - I \cdot R_i$ $\quad U_k =$ Klemmspannung

Die Spannung, die im unbelasteten Zustand zwischen den Klemmen liegt, ist U_0 und wird *Leerlaufspannung* genannt.

Verändert man den Widerstand R_a zwischen den Werten 0 und ∞, so erhält man folgende Kennlinie (Widerstandsgerade):

Fall 1: $R_a = \infty \Rightarrow I = 0 \Rightarrow U_0$ = Leerlaufspannung

Fall 2: $R_a = 0 \Rightarrow I = I_k = I_{max} = \dfrac{U_0}{R_i}$ = Kurzschlußstrom



$$U_k = U_0 - I \cdot R_i \Rightarrow U_k = f(I) \Rightarrow y = mx + b \quad \text{wobei} \quad b = U_0; \quad m = -R_i$$

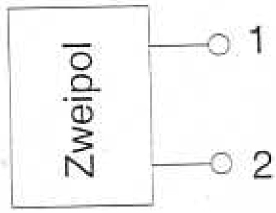
Sind U_o und R_i unabhängig von der Höhe des fließenden Laststromes: => *lineare Quelle*

Ein linearer aktiver *Zweipol* ist immer durch U_o und I_k vollständig charakterisiert.

Zweipol = beliebige elektrische Schaltung, die an zwei Polen zugängig ist:

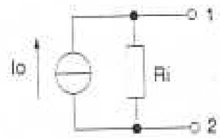
aktiver Zweipol: Zweipol enthält Quelle (Quellen)

passiver Zweipol: Zweipol enthält keine Quelle (Quellen)

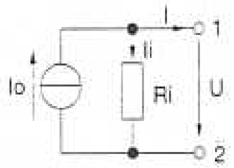


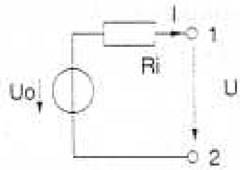
2.3.3 Stromquellen

Eine *reale* Stromquelle wird als Parallelschaltung einer idealen Stromquelle und einem Innenwiderstand R_i dargestellt:



Vergleich mit der Spannungsquelle:





Man kann erkennen, wie eine Stromquelle in eine Spannungsquelle - und umgekehrt- umgerechnet werden kann.

Stromquelle:

$U = I_i \cdot R_i; \quad I_i = I_0 - I$

$\Rightarrow \quad U = I_0 \cdot R_i - I \cdot R_i$

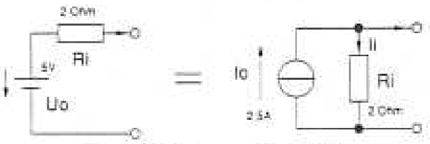
Spannungsquelle:

$U = U_0 - I \cdot R_i$

Es muß gelten :

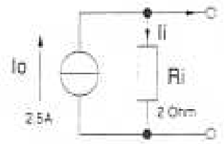
$$U_0 = I_0 \cdot R_i \quad \text{bzw.} \quad I_0 = \frac{U_0}{R_i}$$

Beispiel:



$U_0 = 5\text{V}; \quad R_i = 2\Omega$

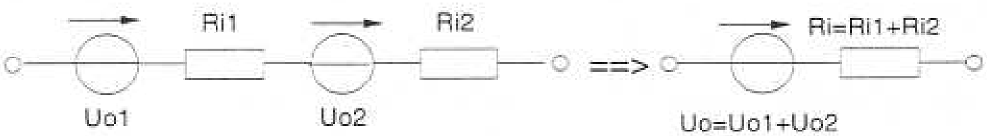
$I_k = \frac{U_0}{R_i} = 2,5\text{A}$



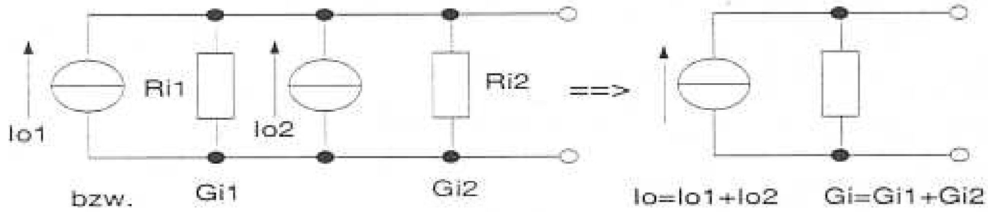
$U_0 = I_o \cdot R_i = 5\text{V}$

$I_k = 2,5\text{A}$

Reihenschaltung von Spannungsquellen:



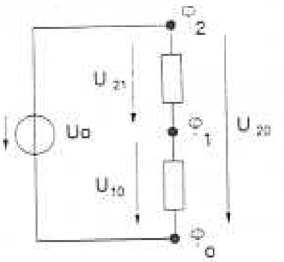
Parallelschaltung von Stromquellen:



2.3.4 Das Potential

Gleiche Maßeinheit wie die Spannung: $[\varphi] = V$

In einem Netzwerk ordnet man den Punkten Spannungen oder Potentiale zu, so daß die Potentialdifferenzen die Spannungen zwischen den Punkten ergeben:



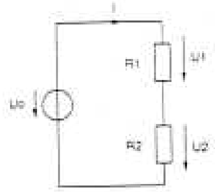
$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$; $U_{10} = \varphi_1 - \varphi_0$; $U_{20} = \varphi_2 - \varphi_0$

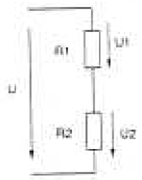
Die dritte Gleichung ergibt sich aus der Addition der ersten beiden => die Potentiale sind nicht eindeutig bestimmt. Man legt deshalb immer einen Bezugspunkt (frei wählbar) fest, z.B. $\varphi_0 = 0$.

somit gilt: $U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$; $U_{10} = \varphi_1$; $U_{20} = \varphi_2$

2.3.5 Spannungsteiler, Stromteiler

Der Spannungsteiler





Schleifengleichung:

$$I \cdot R_1 + I \cdot R_2 - U_0 = 0$$

$$I(R_1 + R_2) = U_0$$

$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

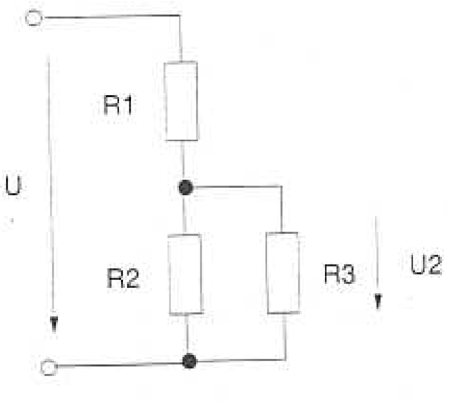
weiterhin gilt:

$$I = \frac{U_1}{R_1} \quad \text{bzw.} \quad I = \frac{U_2}{R_2}$$

$$\frac{U_1}{R_1} = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{U_2}{R_2} = \frac{U_0}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{U_1 = U_0 \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} \text{ bzw. } U_2 = U_0 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2} \text{ oder } \frac{U_0}{U_1} = 1 + \frac{R_2}{R_1} \text{ bzw. } \frac{U_0}{U_2} = 1 + \frac{R_1}{R_2}}$$

belasteter Spannungsteiler:



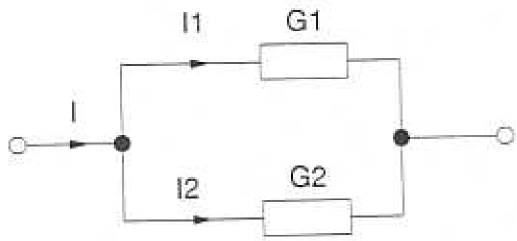
$U_2 = ?$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{\frac{R_3 \cdot R_2}{R_3 + R_2}}{R_1 + \frac{R_3 \cdot R_2}{R_3 + R_2}}$$

$$\frac{U_2}{U} = \frac{R_3 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}$$

$$\Rightarrow \quad U_2 = U \cdot \frac{R_3 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3}$$

Der Stromteiler



$$I = I_1 + I_2$$

$$I_1 = U \cdot G_1 \qquad I_2 = U \cdot G_2$$

$$I = I_1 + I_2 = U(G_1 + G_2)$$

$$\frac{I_1}{I} = \frac{U \cdot G_1}{U \cdot (G_1 + G_2)} = \frac{G_1}{G_1 + G_2}$$

oder mit $G_1 = \frac{1}{R_1}$; $G_2 = \frac{1}{R_2}$

$$\boxed{I_1 = I \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Die Wheatstonesche Brücke:

Man nennt die Brücke "abgeglichen", wenn der Brückenstrom

$I_o = 0$ ist.

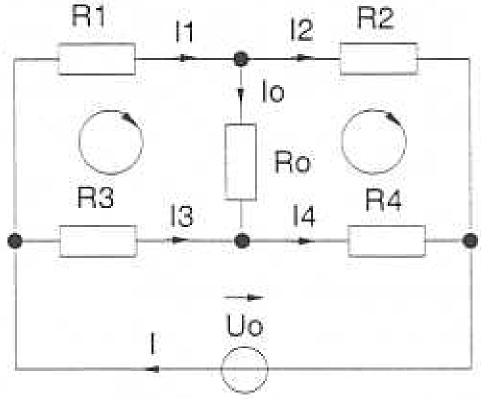
Dann gilt: $I_1 \cdot R_1 - I_3 \cdot R_3 = 0;$

$I_2 \cdot R_2 - I_4 \cdot R_4 = 0;$

$I_1 = I_2; \qquad I_3 = I_4$

Daraus folgt, daß $\dfrac{R_1}{R_3} = \dfrac{R_2}{R_4}$

oder $R_1 \cdot R_4 = R_2 \cdot R_3$



Anwendung: *Widerstandsmessung*

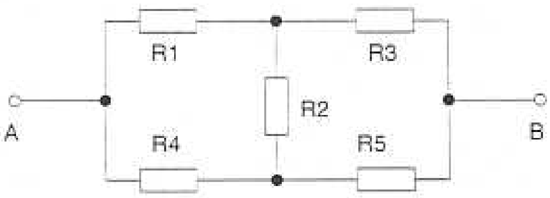
Die Widerstände R_2 und R_4 haben feste bekannte Werte. An die stelle von R_o wird ein empfindliches Strom- oder Spannungsmeßgerät eingesetzt. Der Widerstand $R_1 = R_x$ soll nicht bekannt sein. Der Widerstand R_3 wird durch einen einstellbaren Präzisionswiderstand ersetzt (Widerstandsdekade). Der Widerstand R_3 wird solange verändert, bis die Brücke abgeglichen ist (Meßgerät zeigt nichts mehr an). Dann erhält man für den unbekannten Widerstandswert:

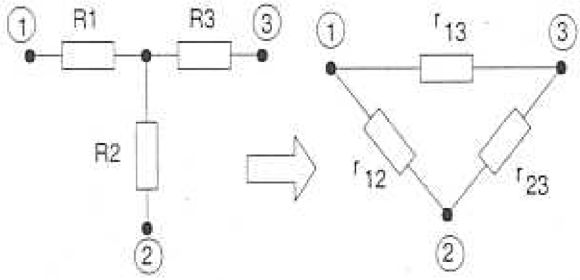
$$R_x = \frac{R_2}{R_4} \cdot R_3.$$

2.3.6 Stern - Dreieck - Umwandlung

Beispiel:

Wie groß ist der Widerstand zwischen den Knoten A und B?





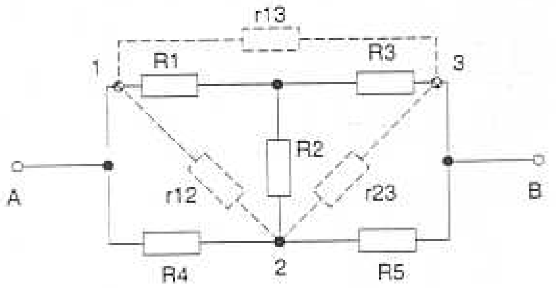
$$r_{13} = \frac{R1 \cdot R2 + R2 \cdot R3 + R1 \cdot R3}{R2}$$

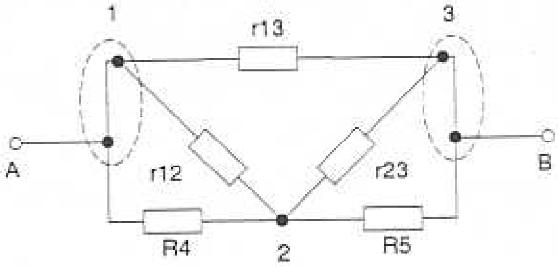
$$r_{12} = \frac{R1 \cdot R2 + R2 \cdot R3 + R1 \cdot R3}{R3}$$

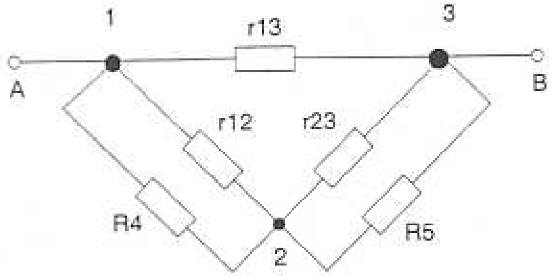
$$r_{23} = \frac{R1 \cdot R2 + R2 \cdot R3 + R1 \cdot R3}{R1}$$

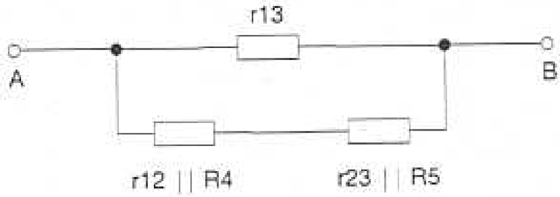
$$Y \rightarrow \Delta = \frac{\sum \text{aller Produkte}}{\text{gegenüberliegenden Widerstand}}$$

Lösung mit:



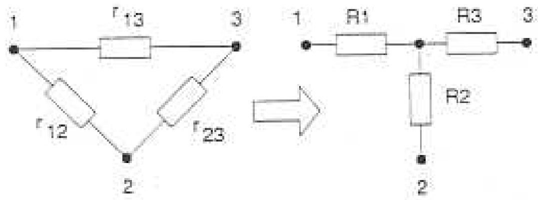






R AB = (r12 || R4 + r23 || R5) || r13

2.3.7 Dreieck - Stern - Umwandlung



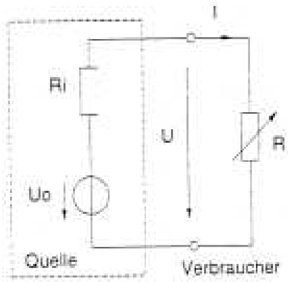
$$R1 = \frac{r_{12} \cdot r_{13}}{r_{12} + r_{13} + r_{23}}$$

$$R2 = \frac{r_{12} \cdot r_{23}}{r_{12} + r_{13} + r_{23}}$$

$$R3 = \frac{r_{13} \cdot r_{23}}{r_{12} + r_{13} + r_{23}}$$

$$\Delta \rightarrow Y = \frac{\text{Produkt der anliegenden Widerstände}}{\sum \text{ der Widerstände}}$$

2.3.8 Die Leistungsanpassung



Definition des Wirkungsgrades:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_{verl}} \leq 1$$

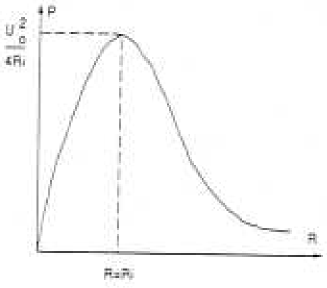
η gibt an, wieviel von der zugeführten Leistung ausgenutzt wird.

Die zugeführte Leistung setzt man 100% => $\eta < 1$.

Sonderfälle: 1. $R = 0 \Rightarrow U = 0 \Rightarrow P_{ab} = 0 \Rightarrow \eta = 0$

2. $R \gg R_i$ => $I = \dfrac{U_0}{R + R_i}$; $P_{ab} = I^2 \cdot R$; $P_{verl} = I^2 \cdot R_i$

$$\eta = \frac{1}{1 + \frac{R_i}{R}} \quad \text{für} \quad R \gg R_i \quad \eta \Rightarrow 1$$



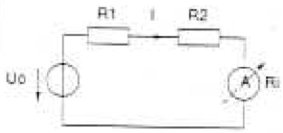
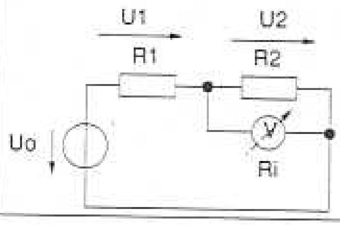
3. Wie groß muß R sein, damit die abgegebene Leistung maximal wird?

$$P = I^2 \cdot R = \left(\frac{U_0^2}{(R_i + R)^2} \right) \cdot R$$

$R_i = R \;\Rightarrow\;$ Leistungsanpassung

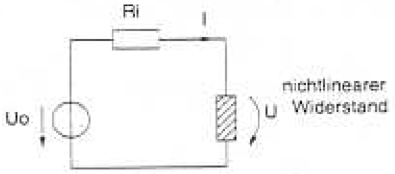
$$\eta_{(R_i = R_a)} = \frac{I^2 \cdot R_a}{I^2 \cdot R_a + I^2 \cdot R_a} = \frac{1}{2}$$

2.3.9 Messung von Strom und Spannung

Strommessung		**Spannungsmessung**	
	$R_i \ll (R_1 + R_2)$ $(R_1 + R_2) = 100 \cdot R_i$ Fehler: $\cong 1\%$ $R_i \to 0$		$R_i \gg R_2$ $R_i = 100 \cdot R_2$ Fehler: $\cong 1\%$ $R_i \to \infty$

2.4 Nichtlineare Gleichstromkreise

Grundschaltung:



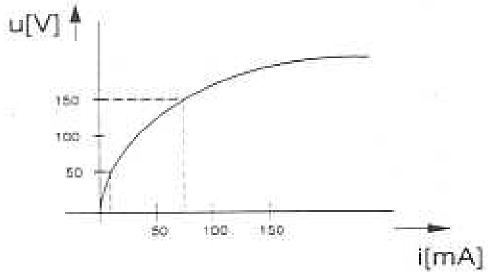
linearer Widerstand:

$U = I \cdot R$

nichtlinearer Widerstand:

$U = f(I)$

Allgemein werden die Widerstandseigenschaften von nichtlinearen Elementen durch eine Strom-Spannungskennlinie beschrieben.



Beispiel für nichtlinearen Widerstand: **V D R** (Voltage Dependent Resistor) = spannungsabhängiger Widerstand, auch Varistor oder Thyrit-Widerstand (Der Widerstand ist bei höherer Spannung kleiner als bei niedriger).

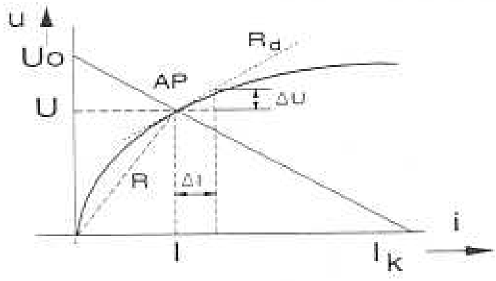
z.B. R bei 50V: $R = \frac{50V}{10mA} = 5k\Omega$

z.B. R bei 150V: $R = \frac{150V}{75mA} = 2k\Omega$

Spannungsabhängige Widerstände können zur Verhinderung von Überspannungen an besonders empfindlichen Bauteilen (z.B. Schalter oder Spulen) verwendet werden. Der VDR wird dann parallel zum Bauteil geschaltet. (Strom nimmt immer den Weg des geringeren Widerstandes.)

Sind Strom und Spannung am nichtlinearen Element gesucht, geht man folgendermaßen vor:

1. Kennlinie des nichtlinearen Widerstandes in das Diagramm einzeichnen.



2. Widerstandsgerade $U_K = U_0 - I \cdot R_i$ einzeichnen.
3. Schnittpunkt heißt Arbeitspunkt (AP). Am Arbeitspunkt können der im Kreis fließende Strom und die am nichtlinearen Widerstand anliegende Spannung abgelesen werden.

Im Arbeitspunkt (AP) entspricht die nichtlineare Kennlinie dem

Gleichstromwiderstand = *statischer Widerstand*: $R = \frac{U_{AP}}{I_{AP}}$.

Untersucht man das Widerstandsverhalten für die Spannungsdifferenz ΔU und die Stromdifferenz ΔI in einem Arbeitspunkt, so erhält man: $\frac{\Delta U}{\Delta I} \approx R_d$. Dieses ist näherungsweise der sogen. **differentielle Widerstand**.

Der Differenzenquotient drückt das Verhalten der Kurve in einem Punkt umso besser aus, je kleiner ΔI ist. Man bildet deshalb den Grenzübergang:

$$\lim_{\Delta I \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta I}\bigg|_{AP} = \frac{dU}{dI}\bigg|_{AP}; \quad R_d = \frac{dU}{dI}\bigg|_{AP}$$

Der differentielle Widerstand ist die Aleitung der Spannung nach dem Strom und entspricht dem Anstieg einer Tangente im Arbeitspunkt.

2.5 Berechnungsmethoden für lineare Gleichstromnetzwerke

2.5.1 Netzwerkberechnung mit Hilfe des Überlagerungssatzes

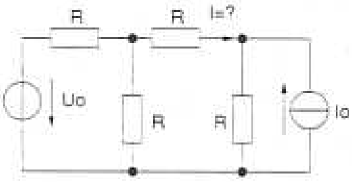
Hat ein **lineares** Netzwerk mehr als eine Energiequelle (Spannungsquelle oder Stromquelle), so kann die Berechnung eines Stromes oder einer Spannung in dem Netzwerk folgendermaßen erfolgen:

a) nacheinander werden alle Quellen – **bis auf eine** – "weggenommen". Die Wegnahme der von Energiequellen bedeutet den Kurzschluß von Spannungsquellen oder die Entfernung von Stromquellen.Der Strom oder die Spannung, die die Verbbleibende Quelle hervorruft, wird berechnet.

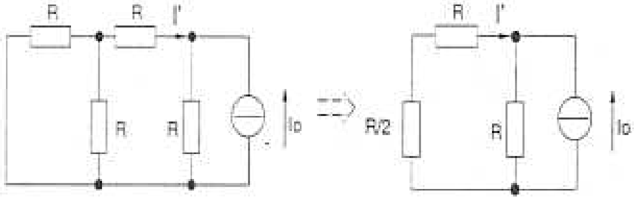
b) Die nach Punkt a) berechneten Ströme bzw. Spannungen werden addiert (überlagert).

Beispiel:

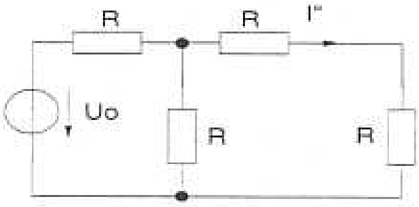
Der Strom **I** ist zu berechnen!



1. Spannungsquelle kurzschließen



2. Stromquelle entfernen

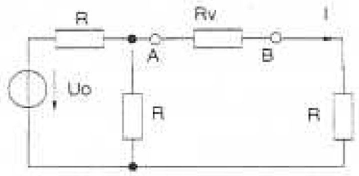


$$I = I' + I''$$

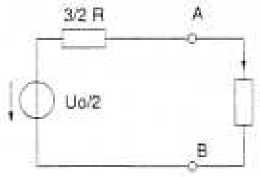
2.5.2 Netzwerkberechnung mit Hilfe der Ersatzspannungsquelle

Soll in einem Netzwerk der Strom durch den Widerstand oder die Spannung am Widerstand berechnet werden, so kann man das gesamte übrige Netzwerk durch eine **Ersatzspannungsquelle** mit der Quellspannung U_{0E} und einem **Innenwiderstand** R_{iE} (E steht für Ersatz) ersetzt werden.

Ableitung an einem Beispiel:
Gesucht ist der Strom I (durch Rv).
Rv = Verbraucherwiderstand

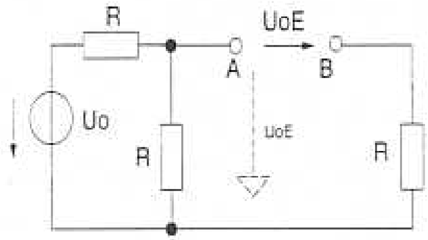


Interpretation:



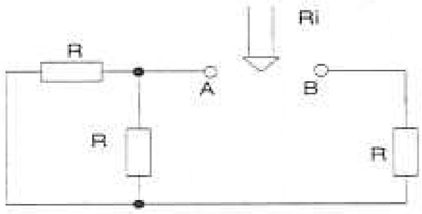
Wie erhält man UoE ?

UoE tritt an den Klemmen A und B auf, wenn kein Strom fließt (*Leerlaufspannung*), d.h. Rv muß entfernt werden. Dann wird zwischen den Klemmen A und B die Leerlaufspannung berechnet.



Wie erhält man Ri ?

Spannungsquellen werden kurzgeschlossen, (eventuelle Stromquellen werden entfernt), zwischen den Klemmen A und B wird Ri berechnet.



2.5.3 Knotenanalyse

Zunächst *vereinfacht* man das Netzwerk indem man *mögliche Zusammenfassungen* vornimmt. (in Reihe geschaltete Spannungsquellen werden addiert, ebenso in Reihe geschaltete Widerstände, parallel geschaltete Stromquellen können addiert werden, ebenso die Leitwerte parallel geschalteter Widerstände)

Problem: Wie wählt man aus der Vielzahl der zur Verfügung stehenden Knoten- und Schleifengleichungen nur die *unbedingt notwendigen = linear unabhängigen Gleichungen* aus und wie findet man *systematisch* die gesuchten Spannungen und Ströme?

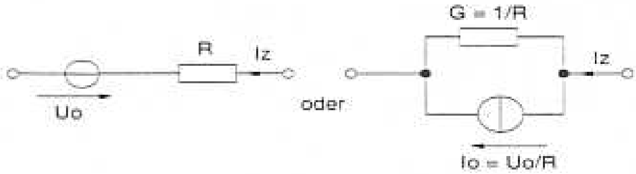
Forderung: Netzwerk enthält keine gesteuerten Quellen (Transistoren).

Topologie: Struktur eines Netzwerkes.

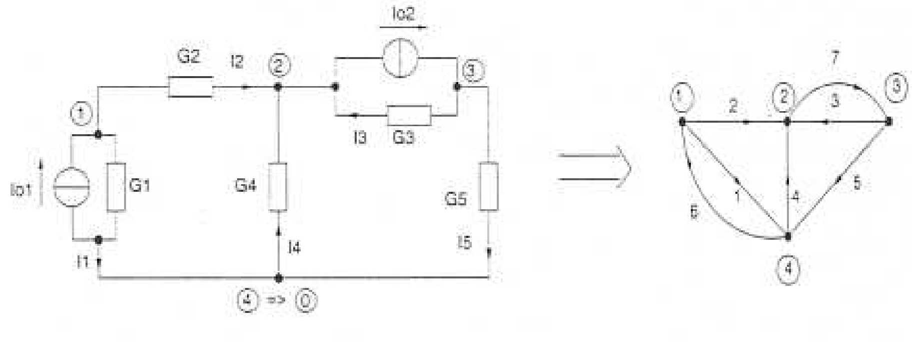
Graph: Streckenkomplex, der die Zweige nur als Linien und die Knoten als Verbindungspunkte enthält.

Zweig: Jeder Zweig kann in allgemeiner Form eines linearen Zweipols auftreten:

Beispiel:



Beispiel Netzwerk:

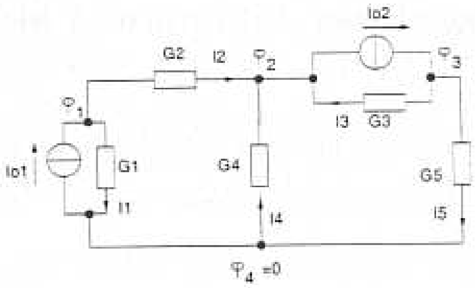


Ist k die Anzahl der im Netzwerk vorhandenen Knoten, so erhält man $n = k - 1$ linear unabhängige Knotengleichungen.

Voraussetzung: 1. nur Stromquellen erlaubt [1)]
2. es dürfen nur Leitwerte auftreten

[1)] Vorhandene Spannungsquellen mit Innenwiderstand werden in Stromquellen mit Innenleitwert umgerechnet

Jedem Knoten wird ein Potential zugeordnet, ein Knoten wird Bezugsknoten und erhält das Potential 0.
Beispiel:



Knotengleichungen:

$K1: \quad I_2 + I_1 - I_{01} = 0$

$K2: \quad -I_2 - I_3 - I_4 + I_{02} = 0$

$K3: \quad I_3 + I_5 - I_{02} = 0$

Ohmsches Gesetz:

$I_1 = \varphi_1 \cdot G_1$ $\qquad I_3 = (\varphi_3 - \varphi_2)G_3$

$I_2 = (\varphi_1 - \varphi_2)G_2$ $\qquad I_4 = -\varphi_2 G_4$

$I_5 = \varphi_3 G_5$

$K1: \quad (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_2 + \varphi_1 \cdot G_1 - I_{01} = 0$

$K2: \quad -(\varphi_1 - \varphi_2) \cdot G_2 + \varphi_2 \cdot G_4 - (\varphi_3 - \varphi_2) \cdot G_3 + I_{02} = 0$

$K3: \quad (\varphi_3 - \varphi_2) \cdot G_3 + \varphi_3 \cdot G_5 - I_{02} = 0$

Gleichungen ordnen:

$$\begin{array}{cccc|c} & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 & \\ K1 & G_1 + G_2 & -G_2 & 0 & I_{01} \\ K2 & -G_2 & G_2 + G_4 + G_3 & -G_3 & -I_{03} \\ K3 & 0 & -G_3 & G_3 + G_5 & I_{03} \end{array}$$

Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 & 0 \\ -G_2 & G_2 + G_4 + G_3 & -G_3 \\ 0 & -G_3 & G_3 + G_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{01} \\ -I_{02} \\ I_{02} \end{pmatrix}$$

Das sind drei Gleichungen zur Berechnung der drei unbekannten Potentiale $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$.

Mit diesen Potentialen lassen sich alle Zweigspannungen und somit auch alle Zweigströme des Netzwerkes berechnen:

z.B. Spannung U_{12} über G_2:

$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ und damit errechnet sich I_2 zu: $I_2 = U_{12} \cdot G_2$.

Formale Regeln zum Aufstellen des Gleichungssystems:

1. In der Hauptdiagonalen der Matrix steht jeweils die Summe aller an dem entsprechenden Knoten angeschlossenen Leitwerte.
2. Nebenelemente sind die negativen Summen der Verbindungsleitwerte.
3. Auf der rechten Seite steht jeweils die vorzeichenbehaftete Summe aller auf den entsprechenden Knoten zu bzw. abfließenden Quellenströme: **zu**fließend **positiv**es, **ab**fließend **negativ**es Vorzeichen.

Die Matrix ist stets symmetrisch zur Hauptdiagonalen!

$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ können beispielsweise nach dem Gauss'schen Eliminierungsverfahren (siehe Lineare Algebra!) oder der Cramer'schen Regel berechnet werden:

$$\varphi_1 = \frac{D_1}{D}; \quad \varphi_2 = \frac{D_2}{D}; \quad \varphi_3 = \frac{D_3}{D}.$$

2.5.4 Schaltungsberechnung mit Simulatoren

A) Hinweise zur Installation des Simulators LTSPICE (SWCADIII) der Fa. Linear Technologie!

0) Dateien: **swcad.zip** (1.35MB), **swcadinst.zip** (1.36MB) und **lib_pal.zip** (554kB) von *"www.ite.fh-wiesbaden.de/~palotasl ==> Elektrotechnik (für Informatik) ==> pdf-files, Programme"* herunterladen (oder *swcadiii.exe* (2.834kB) direkt download von www.linear-tech.com).

1) Die Files *swcad.zip* und *swcadinst.zip* ==> extract in ein temp. Verzeichnis (z.B.: LT), (oder *swcadiii.exe* ==> extract in ein temp. Verzeichnis)

2) Aus diesem Verzeichnis installieren *(setup.exe)* angeboten wird in der Regel C:\programme\LTC\SWCADIII

3) Als Option: (nicht unbedingt erforderlich) Um deutsche "DIN" Symbole zu erhalten, nach der Installation das Verzeichnis **c:\programme\ltc\swcadIII\lib** umbenennen (z.B. lib_lt)

Die Datei **lib_pal.zip** ==> extract in **c:\programme\ltc\swcadIII**

Das erstellte Verzeichnis *lib_pal* umbenennen in **lib**.

4) Temp. Verzeichnis (LT) löschen.

5) Programm scad3.exe starten.

Prof. Dr.-Ing. L. Palotas
FG Elektrische Übertragungstechnik
und Netzwerktheorie

FB Informationstechnologie und Elektrotechnik
FH University of Applied Sciences Wiesbaden

Klausur Elektrotechnik für Informatik SS01 (Teil E)

Name:	Vorname:	Prüfungstag: 03.07.2001
Matr.Nr.:	Unterschrift:	
Raum:	**Maximal erreichbare Punktzahl: 56**	

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Σ
Punkte:	14	14	14	14	14	70
Hilfsmittel:	Alles					
Hinweis:	**Neue Aufgabe ==> neues Blatt !** **Jedes Lösungsblatt mit Namen und Matr.Nr. versehen!** **Aufgabenstellungen sind ebenfalls abzugeben!**					

1 Die Spannung an dem Zweipol **Z** soll mit Hilfe der Ersatzspannungsquelle berechnet werden (*Bild 1*).

1.1 Berechnen Sie die Leerlaufspannung U_{0e} sowie den Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle!

1.2 Berechnen Sie U in Abhängigkeit der Lastimpedanz **Z** !

1.3 Berechnen Sie U für den Fall, dass $Z = 2R$!

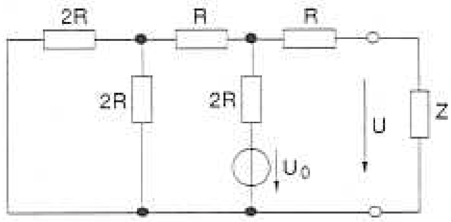
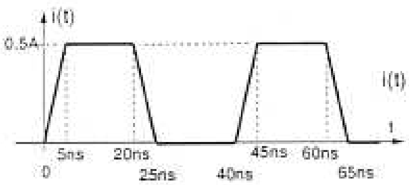


Bild 1

2 An eine Induktivität ($L = 50\ nH$) wird ein periodischer Strom geschaltet. Den zeitlichen Verlauf des Stromes $i(t)$ zeigt *Bild 2*.

2.1 Berechnen und skizzieren Sie die an der Induktivität auftretende Spannung $u(t)$!

2.2 Wie groß ist die Frequenz der Spannung?



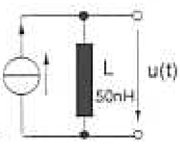


Bild 2

3

Bild 3

An dem Zweipol nach *Bild 3* liegt die Spannung $u(t)$ bei der Frequenz von $f = 50$ Hz an. Der der durch den Zweipol fliessende Strom ist $i(t)$.
Es gilt:

$$u(t) = -\hat{U}\sin(\omega t) \quad \text{mit} \quad \hat{U} = \sqrt{2}\cdot 230\text{V}$$

$$i(t) = \hat{I}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{mit} \quad \hat{I} = 1\text{A}$$

3.1 Ermitteln Sie den komplexen Widerstand (Impedanz) des Zweipols!

3.2 Geben Sie an, durch was für Bauelemente (Schaltung mit Bauelementewerten angeben) die ermittelte Impedanz realisiert werden kann !

3.3 Wie groß die Wirkleistung P ?

4 Die Wechselstrom-Brücke nach *Bild 4* eignet sich zur Messung von verlustbehafteten Kondensatoren.

4.1 Unter welcher Bedingung ist die Brücke abgeglichen ?

4.2 Im abgeglichenen Zustand der Brücke sind folgende Werte gemessen worden:

$C = 100\text{nF}$; $R = 100\text{k}\Omega$; $R_1 = 10\text{k}\Omega$; $C_1 = 1\mu\text{F}$

Wie groß ist die Kapazität C_x und der Verlustwiderstand R_x des Kondensators?

4.3 Wie groß ist die Güte des Kondensators C_x, wenn die Meßfrequenz $f = 15{,}915494$ kHz betrug?

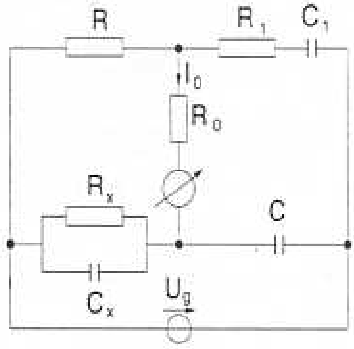


Bild 4

5 Gegeben sind die Schaltungen nach Bild 5a und 5b.

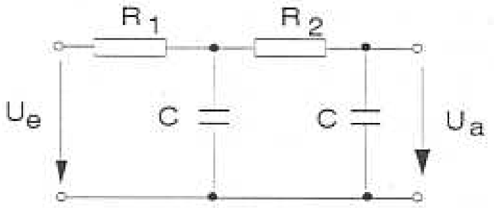


Bild 5a

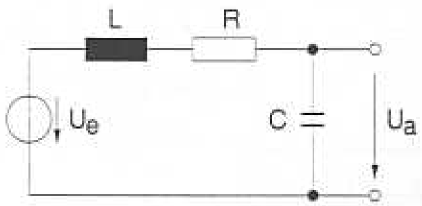


Bild 5b

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion

$$G_a(j\omega) = \frac{U_a}{U_e}$$

der Schaltung nach *Bild 5a*.

b) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion

$$G_b(j\omega) = \frac{U_a}{U_e}$$

der Schaltung nach *Bild 5b*.

c) Bestimmen Sie die Werte der unbekannten Bauelemente (**L=?, R=?**) der Schaltung nach *Bild 5b* für den Fall, dass

$$G_a(j\omega) = G_b(j\omega) = G(j\omega)$$

Angaben: $R_1 = 5\text{k}\Omega$, $R_2 = 20\text{k}\Omega$, $C = 10\text{nF}$

d) Bei welcher Frequenz wird die Übertragungsfunktion $G(j\omega)$ rein imaginär?

e) Skizzieren Sie den qualitativen Verlauf des Betrages der Übertragungsfunktion! Welches Übertragungssystem stellen die Schaltungen dar?

Prof. Dr.-Ing. L. Palotas
FG Elektrische Übertragungstechnik
und Netzwerktheorie

FB Informationstechnologie und Elektrotechnik
FH University of Applied Sciences Wiesbaden

Lösung der Klausur Elektrotechnik für Informatik SS01 (Teil E) in Kurzform

1 1.1 $R_i = 2R,\quad U_{oe} = U_0/2$ 1.2 $U = \frac{U_0}{2}\frac{Z}{2R+Z}$ 1.3 $U_0/4$

2 2.1 $0 < t < 5\text{ns}$: Impuls, Amplitude 5V 2.2 $f = 25MHz$

$5\text{ns} < t < 20\text{ns}$: 0V

$20\text{ns} < t < 25\text{ns}$: Impuls, Amplitude -5V

3

3.1 $\underline{Z} = 325 \cdot e^{j\frac{\pi}{4}}$

3.2 Reihenschaltung von: Widestand $R = 230\Omega$ und Induktivität $L = 0,73H$

3.3 $P = 115W$

4

4.1 $I = 0,\quad R \cdot \frac{1}{j\omega C} = \left(R_1 + \frac{1}{j\omega C_1}\right)\left(\frac{R_x}{1 + j\omega C_x R_x}\right)$

4.2 $R_x = 1M\Omega,\quad C_x = 10nF$

4.3 $Q = 1000$

5

a) $G_a(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 - \omega^2 C^2 R_1 R_2 + j\omega C(2R_1 + R_2)}$

b) $G_b(j\omega) = \frac{U_a}{U_e} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$

c) $L = 1H,\quad R = 30k\Omega$

d) $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, oder $\omega = \frac{1}{C\sqrt{R_1 R_2}}$

e) $|G_b| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2}}$ $\rightarrow$ Tiefpaß zweiten Grades

Prof. Dr.-Ing. Dr.Techn. L. Palotas
Fachgebiet Übertragungstechnik und
und Netzwerktheorie

FB 03 Informationstechnologie und Elektrotechnik
Wiesbaden University of Applied Sciences (FHW)

Klausur Elektrotechnik für Informatik WS01 (Teil E)

Name:	Vorname:	Prüfungstag: 23.01.2001, 9.00 Uhr
Matr.Nr.:	Unterschrift:	
Raum: 101	**Maximal erreichbare Punktzahl: 56**	

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Σ
Punkte:	18	8	16	20	10	72
Hilfsmittel:	Script, Formelsammlung, Taschenrechner (keine Musterlösungen!)					
Hinweis:	**Neue Aufgabe ==> neues Blatt !** **Jedes Lösungsblatt mit Namen und Matr.Nr. versehen!** **Aufgabenstellungen sind ebenfalls abzugeben!**					

1 Ein digitales (TTL) Interface soll von der Batterie eines PKW mit Hilfe des nebenstehenden Spannungsteilers betrieben werden.

Angaben:

Eingangsspannung $U_0 = 12{,}6\text{V}$

Ausgangsspannung des Spannungsteilers im unbelasteten Zustand *(Bild 1a)* $U_{2a} = 5.2\text{V}$

Ausgangsspannung des Spannungsteilers im belasteten Zustand *(Bild 1b)* $U_{2b} = 4.8\text{V}$ bei einem Laststrom von $I = 48\text{mA}$

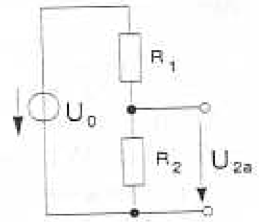


Bild 1a

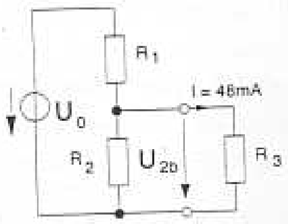


Bild 2b

a) Bestimmen Sie die Werte der unbekannten Widerstände R_1 und R_2.

b) Welche Leistung wird in R_1, R_2 und R_3 bei der Schaltung nach Bild 2b umgesetzt ? Welche Leistung wird in diesem Fall der Batterie entnommen.? Wie groß ist der Wirkungsgrad?

c) Durch welche Schaltungsanordnung könnte man den Wirkungsgrad verbessern? Bitte Skizze angeben!