Matritzen :

Definitionen:

A und B gleichartig	A, B : Anzahl von Spalten und Zeilen gleich
Spur von A	Summe der Hauptdiagonalelemente von A
Diagonalmatrix	Alle Elemente bis auf Hauptdiagonale =0
obere Dreiecksmatrix	Alle Elemente unterhalb der Hauptdiagonalen =0
untere Dreiecksmatrix	Alle Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen =0
A symetrisch	Elemente spiegelsymetrisch zur Hauptdiagonalen (nxn) , Hauptdiagonale egal
A schiefsymetrisch	$a_{ik} = -a_{ki}$ (nxn , alle Hauptdiagonalelemente =0)
Einheitsmatrix	E , Alle Elemente der Hauptdiagonalen =1, sonst 0
Transponierte von A	$A^T = (a_{ik})^T = a_{ki}$ (A^T=A ➔ A quadratisch und symetrisch)
A orthogonal	(nxn) $A^T=A^{-1}$

Zeilenmatrix*Spaltenmatrix=Zahl
Spaltenmatrix*Zeilenmatrix=Matrix
Matrix*Spaltenmatrix=Spaltenmatrix

Rechenregeln:

$(A+B)^T = A^T+B^T$
$A*B \neq B*A$ (nur A_{mxl} und B_{lxn} ,$c_{ik} = a_{i1}*b_{1k}+a_{i2}*b_{2k}+...$)
$(A*B)^T = A^T*B^T$
$A*E = A$
$A*A^{-1}= E$
$A^{-1}=1/A$

Spiegelungsmatrix (an x-Achse) $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} * \vec{x}$

Drehmatrix (um Winkel β) $\vec{y} = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} * \vec{x}$

Determinanten:

Definitionen: Determinanten nur bei nxn Matrix

A = regulär	det A≠0 (A quadratisch, E z.B. regulär
A = singulär	det A=0

Rechenregeln:

det A = 0	wenn Spalte oder Zeile nur Nullen enthält eine Zeile ein Vielfaches einer anderen
det E=1	
det(A*B)=detA*detB	A,B gleichartig und quadratisch (Multiplikationssatz)
det $A=a_{11}*a_{22}*..*a_{nn}$	bei einer Dreiecksmatrix
det A = det A^T	
$(\det A)^{-1}=1/\det A$	

Beim Vertauschen zweier Zeilen oder Spalten ändert die Det. Ihr Vorzeichen
Bei Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit c,multipliziert sich die Det. mit c
Det. bleibt gleich, wenn man zu einer Zeile(Sp.) ein Vielfaches einer anderen addiert

Laplacescher Entwicklungssatz: (Entwicklung nach Zeile(Spalte) mit meisten Nullen)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}(-1)^{k+i} * \det A_{ik}$$ (Entwicklung nach i-te Zeile bzw. k-te Spalte)

Inverse Matritzen:

Definition: A*X=X*A=E ➔ $X=A^{-1}$ (inverse Matrix) ➔ $A*A^{-1}$=E
zu jeder regulären Matrix nxn gibt es genau eine inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} (+)\alpha_{11} & (-)\alpha_{21} & (+)\alpha_{31} & \dots & \alpha_{n1} \\ (-)\alpha_{12} & (+)\alpha_{22} & (-)\alpha_{32} & \dots & \alpha_{n2} \\ (+)\alpha_{13} & (-)\alpha_{23} & (+)\alpha_{33} & \dots & \alpha_{n3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \alpha_{3n} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} * A_{adj} \quad , \alpha_{Zeile/Spalte} , \quad \alpha_{ik} = (-1)^{i+k} * \det A_{ik}$$

Lineare Gleichungssysteme:

Definition: $A\vec{x} = \vec{c}$ $\vec{c} = \vec{0}$ →LGS homogen , $\vec{c} \neq \vec{0}$ →LGS inhomogen **$\vec{x}$ ist gesucht**

Lösbarkeitskriterien für inhomogene nxn LGS:

$A\vec{x} = \vec{c}$	→det A ≠ 0	→genau eine Lösung(eindeutig lösbar)
	→det A = 0	→unendlich viele Lösungen (lösbar)
		→keine Lösung (unlösbar)

Lösbarkeitskriterien für homogene nxn LGS:

$A\vec{x} = \vec{0}$	→det A≠0	→genau eine Lösung
	→det A=0	→unendlich viele Lösungen

Lösung mit Hilfe von inversen Matrizen:

$\vec{x} = A^{-1} * \vec{c}$ A =nxn und regulär,c=Lösungsvektor $A^{-1} = \frac{1}{\det A} * AdjA$

Lösung mit Hilfe der Cramerschen Regel: (A muß regulär sein, det A≠0)

Eigenwerte und Eigenvektoren von Matritzen:

Definition: $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

Spektrum von A Menge aller Eigenwerte von A

Rechenregeln: $\det A = \lambda_1 * \lambda_2 * \dots * \lambda_n$

Spur A= $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n$

A regulär und invertierbar: λ Eigenwert zu A ➔ λ^{-1} Eigenwert von A^{-1}

Eigenvektor zu λ von A = Eigenvektor zu λ^{-1} von A^{-1}

A hat gleiche Eigenwerte wie A^T

Bestimmen der Eigenwerte : $P(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & .. & a_{1n} \\ .. & .. & .. \\ a_{n1} & .. & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ (charakterist. Gleichung)

Einsetzen der Eigenwerte und Bestimmen der Eigenvektoren:

Lösen der LGS $(A - \lambda E)\vec{x} = \vec{0}$

(Alle Eigenwerte in λ einsetzen und zugehörige Eigenvektoren bestimmen), LGS mit Gaus-Algorithmus lösen!!!

Reihen:

Konvergenz einer Reihe:

Eine Reihe heißt konvergent mit dem Grenzwert s, wenn die Folge der Partialsummen gegen s konvergiert, sonst divergent.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\alpha a_n + \beta b_n\right) = \alpha\sum_{n=0}^{\infty} a_n + \beta\sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent → $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ Hinweis: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ (div+div=konv)

geometrische Reihe : $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$,für q<1 (auch neg,), sonst divergent, n muß bei 0 beginnen

harmonische Reihe : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ divergent für α≤1, konvergent für α >1

Majorantenkriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent und $|a_n| \le b_n$ → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent

absolute Konvergenz: $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konvergent → $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent

Wurzelkriterium: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = q$ q<1: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

q>1: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert   ,q=1:keine Aussage

Quotientenkriterium: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$ q wie Wurzelkriterium

Leibnitz Kriterium: alternierende Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergent, falls a_n monot.Nullfolge

Potenz- und Taylorreihen:

Konvergenzradius R von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(x - x_0\right)^n$:   1. $R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ 2. $R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

Konvergenzintervall I wird um Entwicklungspunkt x_0 verschoben (x_0-R,x_0+R)

Gliedweise Differentiation: $f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{d}{dx}\left(x - x_0\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n * a_n\left(x - x_0\right)^{n-1}$,f(x) in I diff’bar

Gliedweise Integration: $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\left(x - x_0\right)^n dx = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\left(x - x_0\right)^{n+1}\right) + c$,f(x) in I diff’bar

f’(x) = Taylorreihe ➔ f(x) = $\int$ Taylorreihe

Taylorformel: $f(x) = T_K(x) + R_K(x) = \sum_{n=0}^{K}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n + R_K(x)$ $T_K(x)$= Taylorpolynom vom Grad K

Restgliedformel von Lagrange: $R_K(x) = \frac{f^{(K+1)}(\delta)}{(K+1)!}\left(x - x_0\right)^{K+1}$,δ zwischen x_0 und x

Restgliedabschätzung: $|R_K(x)| \le \left(\left\langle \max\left|f^{(K+1)}(t)\right|\right\rangle \frac{\left|x - x_0\right|^{K+1}}{(K+1)!}\right)$,t∈[a,b]

Taylorreihe: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(x_0\right)}{n!}\left(x - x_0\right)^n$ in (a,b) <-> $\lim_{k\to\infty} R_K(x) = 0$ in (a,b)

$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)x^n$ bei gemeinsamem Konvergenzbereich

Funktionen mehrerer Variablen:

Partielle Differenzierbarkeit:

Eine Funktion ist an einer bestimten Stelle partiell nach der Variablen x_k diff'bar die Grenzwerte der Differenzenquotienten existieren.

Vertauschungssatz von Schwartz: $f_{xyz} = f_{yxz} = f_{zyx}$

Ebenengleichung: $z=z_0+A(x-x_0)+B(x-x_0)$ (Dreiecksfläche bei b,c und α : $A=0.5*b*c*\sin\alpha$)

Tangentialebene: $z = t(x,y) = f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$ ➔ wenn z_0 gegeben $f(x_0,y_0)= z_0$

Das totale Differential: $dz=df=f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy$ n=2

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_{xi}(p_0)dx_i \quad 1$$ n=beliebig

Fehlerrechnung: $\Delta f \approx df$, absoluter Maximalfehler $|\Delta z_{max}| = \pm(|f_{x1}\Delta x_1|+...+|f_{xn}\Delta x_n|)$

Extremstellen mehrerer Variablen

Notwendige Bedingung: $f(x_1,...,x_n)$ besitzt in $P_0(a_1,...,a_n)$ ein relatives Extremum

→ $f_{x1}(a_1,...,a_n) = f_{x2}(a_1,...,a_n) =...= f_{xn}(a_1,...,a_n) = 0$ (waag. Tangentialebene)

Hinreichende Bedingung:

$$\Delta = \Delta(x_0,y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0.y_0) \end{vmatrix} = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f^2{}_{xy}(x_0,y_0)$$

$\Delta > 0$: rel.Extremum in (x_0,y_0)

$f_{xx}(x_0,y_0)>0$ ➔ rel. Min. $f_{xx}(x_0,y_0)<0$ ➔ rel. Max.

$\Delta < 0$: kein Extremum in (x_0,y_0) (Sattelpunkt)

$\Delta = 0$: keine allgemeine Aussage möglich

Extremwerte unter Nebenbedingungen: $g(x_1,...,x_n)=0$

Implizite Funktionen:

Ableitung: $y' = f'(x) = -\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$

Doppelintegrale: (Integrations-Reihenfolge vertauschbar, wenn Integrationsgrenzen konstant)

Bestimmung der Integrationsgrenzen: erst x, y=f(x), z=f(x,y)

Berechnung von Doppelintegralen:

1. g(x),h(x) stetige Funktionen, $B=\{(x,y) \in R^2 : a \le x \le b , g(x) \le y \le h(x)\}$: B=Normalbereich

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right]dx$$

2. p(y),q(y) stetige Funktionen, $B=\{(x,y) \in R^2 : c \le y \le d , p(y) \le x \le q(y)\}$: B=Normalbereich

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \int_c^d \left[\int_{p(y)}^{q(y)} f(x,y)dx\right]dy$$

Geometrische Deutung des Doppelintegrals:

$\iint_B f(x,y)dxdy =$ Volumen zwischen der Fläche z=f(x,y) und B

$\iint_B dxdy =$ Flächeninhalt von B

Doppelintegrale in Polarkoordinaten:

$$\iint_B f(x,y)dxdy = \iint_{B^*} f(r*\cos\varphi, r*\sin\varphi)*r*drd\varphi$$

B=Bereich der xy-Ebene

B*=zugehöriger Bereich der rφ-Ebene , $x=r*\cos\varphi$, $y=r*\sin\varphi$

Dreifachintegrale (Volumenintegrale):

Berechnung:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iint_B \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy = \int_a^b \left[\int_{p(x)}^{q(x)} \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dy\right]dx$$

Anwendung: - $\iiint_V dV$ =Volumenintegral von V

- geometrischer Schwerpunkt: $x_s = \dfrac{1}{I(V)}\iiint_V xdV$ $\quad y_s = \dfrac{1}{I(V)}\iiint_V ydV$ $\quad z_s = \dfrac{1}{I(V)}\iiint_V zdV$

I(V) = Volumeninhalt von V

- Ladundsdichte $\iiint_V \rho(x,y,z)dV$

Substitutionsregeln für Volumenintegrale:

1. Zylinderkoordinaten
   - $x=r*\cos\varphi$ $\quad r \in [0,\infty)$
   - $y=r*\sin\varphi$ $\quad \varphi \in [0,2\pi]$
   - $z=z$ $\quad r \in R$
   - V*=zugehöriger Bereich von V

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_{V^*} f(r*\cos\varphi, r*\sin\varphi, z)*r*drd\varphi dz$$

2. Kugelkoordinaten
   - $x=r*\cos\varphi * \cos\delta$ $\quad r \in [0,\infty)$
   - $y=r*\sin\varphi * \cos\delta$ $\quad \varphi \in [0,2\pi]$ $\quad$ φ=Längenkreis

z=r*sin δ δ ∈ [-π/2, π/2] δ=Breitenkreis
V*= zugehöriger Bereich von V

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \iiint_{V^*} f(r*\cos\varphi*\cos\delta, r*\sin\varphi*\cos\delta, r*\sin\delta)*r^2*\cos\delta*drd\varphi d\delta$$

Differentialgeometrie:

Parameterdarstellung einer Kurve:

allgemein: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$,t ∈ [a,b] Einheitskreis: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$, t ∈ [0,2π]

Ellipse: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} a*\cos t \\ b*\sin t \end{pmatrix}$, t ∈ [0,2π]

Schraubenlinie: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} R*\cos t \\ R*\sin t \\ t \end{pmatrix}$,t>0 $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t*\cos t \\ t*\sin t \\ t \end{pmatrix}$ =Blechschraube

Gerade: $\vec{r}(t) = \vec{a} + t*\vec{b}$

Ableitung von Vektorfunktion:

$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$ - Geschwindigkeitsvektor $\vec{a}(t) = \vec{r}\,''(t)$ - Beschleunigunsvektor

$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$ = Tangentenvektor $\vec{r}_0\,'(t) = \frac{\vec{r}\,'(t)}{|\vec{r}\,'(t)|}$ = Einheitstangentenvektor

Hauptnormaleneinheitsvektor $= \frac{\vec{r}\,''(t)}{|\vec{r}\,''(t)|}$, steht senkrecht auf Einheitstangentenvektor

Parameterdarstellung der Tangente in P mit Ortsvektor r(t_0) : $\vec{v}(s) = \vec{r}(t_0) + s\vec{r}\,'(t_0)$

Länge einer Kurve: (Punkt A → Punkt B: a = t(A) , b = t(B))

$l = \int_a^b |\vec{r}\,'(t)|dt$ $|\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (v'(t))^2 + (z'(t))^2}$

Parameterdarstellung einer Fläche:

$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix} = \vec{a} + u\vec{b} + v\vec{c} = \begin{pmatrix} a_1 + ub_1 + vc_1 \\ a_2 + ub_2 + vc_2 \\ a_3 + ub_3 + vc_3 \end{pmatrix}$ $\vec{a}$ =Ortsvektor $\vec{b}, \vec{c}$ =Richtungsvektoren

Kugeloberfläche: $\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} a*\cos u*\cos v \\ a*\sin u*\cos v \\ a*\sin v \end{pmatrix}$ u ∈ [0,2π], v ∈ [-π/2, π/2]

Tangentenvektoren: $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$

Normalenvektor: $\vec{n}(u_0,v_0) = \vec{r}_u(u_0,v_0)x\vec{r}_v(u_0,v_0)$ $\vec{n}(u_0,v_0) = \vec{r}_u x\vec{r}_v = \begin{vmatrix} \overrightarrow{e_x} & \overrightarrow{e_y} & \overrightarrow{e_z} \\ r_{u1} & r_{u2} & r_{u3} \\ r_{v1} & r_{v2} & r_{v3} \end{vmatrix}$

(senkrecht zur Tangentialebene)

Normaleneinheitsvektor: (Flächennormale) $\vec{n}_0(u_0,v_0) = \frac{\vec{r}_u(u_0,v_0)x\vec{r}_v(u_0,v_0)}{|\vec{r}_u(u_0,v_0)x\vec{r}_v(u_0,v_0)|}$

Tangentialebene: $\vec{v}(s,t) = \vec{r}(u_0,v_0) + s*\vec{r}_u(u_0,v_0) + t*\vec{r}_v(u_0,v_0)$

Flächeninhalt einer Fläche F:

O(F)= $\iint_B |\vec{r}_u x\vec{r}_v|dudv = \iint_B \sqrt{1 + f_x^{\,2}(x,y) + f_y^{\,2}(x,y)}dxdy$ (z.B. $\int_0^{2\pi}\int_0^h$)→ Gebrauch von Polarkoordinaten

Vektoranalysis:

Darstellung eines Vektorfeldes: $$\vec{v}(x,y,z)=\begin{pmatrix} v_1(x,y,z) \\ v_2(x,y,z) \\ v_3(x,y,z) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Gradient eines Skalarfeldes: (f=Skalarfunktion, n=Einheitsvektor)

Richtungsableitung(Steigung) in Richtung Vektor a: $\vec{n}=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ∇ =Nabla-Operator (part.Ableit.1.Ord)

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x,y,z)=\vec{n}*\begin{pmatrix} f_x(x,y,z) \\ f_y(x,y,z) \\ f_z(x,y,z) \end{pmatrix}=\vec{n}*gradf(x,y,z) \qquad gradf(x,y,z)=\nabla f(x,y,z)$$

Geometrische Deutung von grad f: a) Ist grad f $\neq \vec{0}$ in einem Punkt P, so hat grad f die Richtung des größten Anstiegs
b) Der Betrag |grad f| gibt den Maximalanstieg an (α = arctan(Anstieg))

Äquipotentialfläche: Skalarfunktion: A={(x,y,z) $\in R^3$: F(x,y,z) = c} (Niveaufläche)

Flächennormale: Gilt grad F $\neq$ 0 in einem Punkt P der Äquipotentialfläche, so steht grad F senkrecht auf A in P

Divergenz: (v=Vektorfunktion) div $\vec{v}=\nabla*\vec{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$

Physikalische Deutung:
div $\vec{v}(x,y,z)$ = Quellendichte
div $\vec{v}(x,y,z)$ >0 → P(x,y,z) ist eine Quelle
div $\vec{v}(x,y,z)$ <0 → P(x,y,z) ist eine Senke
div $\vec{v}(x,y,z)$ =0 → Vektorfeld quellenfrei

Rotation: (v=Vektorfunktion) $$\text{rot } \vec{v}=\nabla x\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial y}-\frac{\partial v_2}{\partial z} \\ \frac{\partial v_1}{\partial z}-\frac{\partial v_3}{\partial x} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x}-\frac{\partial v_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Physikalische Deutung:
rot $\vec{v}$ zeigt in Richtung des Drehvektors
| rot $\vec{v}$ | = Maß für die Drehgeschwindigkeit
rot $\vec{v}$ = $\vec{0}$ → Vektorfeld wirbelfrei
rot $\vec{v}$ $\neq \vec{0}$ → Vektorfeld =Wirbelfeld

Rechenregeln: (u,v=Vektorfunktion, f,g=Skalarfunktion)

$\nabla * f = grad$ f — Skalarfunktion → Vektorfunktion
$\nabla*\vec{v}=div\ \vec{v}$ — Vektorfunktion → Skalarfunktion
$\nabla x\vec{v}=rot\ \vec{v}$ — Vektorfunktion → Vektorfunktion

grad(f+g) = grad f * grad g
div($\vec{u}+\vec{v}$) = div $\vec{u}$ +div $\vec{v}$
rot($\vec{u}+\vec{v}$) = rot $\vec{u}$ + rot $\vec{v}$
div (f* $\vec{u}$) = (grad f)* $\vec{u}$ +f(div $\vec{u}$)
rot(f* $\vec{u}$) = (grad f)x $\vec{u}$ +f(rot $\vec{u}$)
div($\vec{u}$ x $\vec{v}$) = $\vec{v}$ (rot $\vec{u}$) - $\vec{u}$ (rot $\vec{v}$)
rot(grad f) = $\vec{0}$ → ein Gradientenfeld ist stets wirbelfrei
div(rot $\vec{u}$) = 0
div(grad f) = $f_{xx}+f_{yy}+f_{zz}$

Kurvenintegral einer Vektorfunktion: (V=Vektorfunktion, K=glatte Kurve)

$$\int_K \vec{v}d\vec{r}=\int_a^b \vec{v}(x(t),y(t),z(t))*\vec{r}\,'(t)dt=\int_a^b \vec{v}(\vec{r}(t))*\vec{r}\,'(t)dt$$

z.B. A= $\int_K \vec{v}d\vec{r}$ Arbeit im Kraftfeld längs $\vec{v}$ K

Eigenschaften:
$\int_K c*\vec{v}d\vec{r}$ = c $\int_K \vec{v}d\vec{r}$
$\int_K (\vec{u}+\vec{v})d\vec{r}=\int_K \vec{u}d\vec{r}+\int_K \vec{v}d\vec{r}$
$\int_K \vec{v}d\vec{r}=\int_{K1} \vec{v}d\vec{r}+\int_{K2} \vec{v}d\vec{r}$ Kurve K setzt sich aus Kurve K1 und K2 zusammen
$\int_K \vec{v}d\vec{r}$ = - $\int_{K*} \vec{v}d\vec{r}$ Kurve K* entgegengesetzte Richtung zu K

Kurvenintegrale sind im allgemeinen <u>nicht</u> wegunabhängig

Gradientenfeld: (rot $\vec{v} = \vec{0}$ → $\vec{v}$ ist Gradientenfeld)

Gilt $\vec{v}$ =grad f → f Potentialfunktion zu $\vec{v}$, $\vec{v}$ =Gradientenfeld (konservativ)
Gebiet: zusammenhängende und offene (ohne Randpunkte) Teilmenge von R^3
Kurvenintegrale in Gradientenfeldern sind wegunabhängig

→ Abstand zweier Punkte P,Q : $\int_P^Q \vec{v}d\vec{r} = \int_K \vec{v}d\vec{r} = \int_K (grad f)d\vec{r} = f(x_2 y_2, z_2) - f(x_1, y_1, z_1)$ (f=Potentialfunktion)

Satz: $\vec{v}$ konservativ($\vec{v}$ =grad f) ↔ $\vec{v}$ wirbelfrei (rot $\vec{v} = \vec{0}$)

Potentialfunktion f(x,y,z)= $\int_0^x v_1(s,0,0)ds + \int_0^y v_2(x,t,0)dt + \int_0^z v_3(x,y,u)du$

Satz von GREEN (in der Ebene):

$\oint_K \vec{v}d\vec{r} = \oint_K fdx + gdy = \iint_B (g_x - f_y)dxdy$ K: einfach geschlossene Kurve $\left(\vec{v} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}\right)$

Flächeninhalt von B: f(B)= $\oint_K \vec{v}d\vec{r} = \oint_K xdy$ für $\vec{v}$ (x,y)=$\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$

Oberflächenintegral: (Fluß einer Vektorfunktion durch eine Fläche)

$\iint_F \vec{v}d\vec{O} = \iint_B \vec{v}(\vec{r}(u,v)) * [\vec{r}_u x \vec{r}_v]dudv$ F: $\vec{r}(u,v) = \vec{c} + u\vec{a} + v\vec{b}$ (Parameterdarstellung der Fläche)

(v=Vektorfeld durch Fläche)

Integralsatz von Stokes: (F=Fläche, K ihre Randkurve, $\vec{v}$ =ein auf F definiertes Vektorfeld)

$\iint_F rot\vec{v}d\vec{O} = \oint_K \vec{v}d\vec{r}$ Recht-Hand-Regel (Finger in Richtung Kurve K→Normalenvektor in Richtung Daumen)

Nur Kurve in Parameterdarst. Bestimmen und in v einsetzen (v1=r(t)...)

Satz von Gauß: (Divergenzsatz) (V=Körper, F seine Oberfläche, $\vec{v}$ = ein in V definiertes Vektorfeld)

$\iiint_V div\vec{v}dV = \iint_F \vec{v}d\vec{O}$

Gewönliche Differentialgleichungen:

Definitionen:	g(x)	Störfunktion
	homogene Dgl.	g(x)=0
	inhomogene Dgl.	g(x)≠0

Lösung von Dgl. 1.Ordnung:

Trennung der Variablen: (nur auf separierbare Dgl. anwendbar)

G(y)=F(x)+c mit G(y)= $\int \frac{1}{g(y)}dy$ und F(x)= $\int f(x)dx$,dann nach y auflösen

Substitution durch z=y/x: (Überführung in eine separierbare Dgl.)

$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ →Subst. Z=y/x → $z' = \frac{1}{x}(f(z) - z)$

Lösung von Dgl.: $y' + f(x)y = g(x)$ (nur bei linearen Gleichungen)

$$y(x) = e^{-\int f(x)dx}\left(c + \int g(x) * e^{\int f(x)dx}dx\right)$$

Lösung von Dgl. n.Ordnung mit konst. Koeffizienten:

Ableitung von komplexwertigen Funktionen mit reellen Variablen

w'(x) = u'(x)+jv'(x)
$(e^{cx})' = c*e^{cx}$

Lösung homogener linearer Dgl. n-ter Ord. mit konstanten Koeffizienten:

Lösung der char.Gleichung	reell/komplex	Vielfachheit	Lösungen (y bzw. y_k)
λ (Anzahl der Nullstellen)	reell	einfach	$C_1e^{\lambda x} + C_2e^{\lambda x}$ + ...
λ	reell	k-fach	$C_1e^{\lambda x}, C_2xe^{\lambda x}, \ldots, C_kx^{k-1}e^{\lambda x}$
λ_1=p+jq λ_2=p-jq	komplex	einfach	C_1 e^{px}cos (qx), C_2 e^{px}sin (qx)
λ_1=p+jq λ_2=p-jq	komplex	k-fach	e^{px}cos(qx),xe^{px}cos(qx),..,$x^{k-1}e^{px}$cos(qx) e^{px}sin(qx),xe^{px}sin(qx),...,$x^{k-1}e^{px}$sin(qx)

Lösung inhomogener linearer Dgl. n-ter Ord. mit konstanten Koeffizienten:

$y = y_k + y_p$ Lösung=allgem.Lösung mit g(x)=0 + partikuläre Lösung

Bestimmung der partikulären Lösung y_p:

- p,q herausfinden
- geeignete partikuläre Lösung heraussuchen (Tabelle)
- so oft ableiten wie nötig
- mit g(x) gleichsetzen
- Koeffizientenvergleich

Störfunktion g(x)	Ansatzfunktion y_p
$e^{px}(\alpha_0+\alpha_1x+...+\alpha_mx^m)$	$e^{px}(\beta_0+\beta_1x+...+\beta_mx^m)$,x^t t=Potenz wie g(x) falls p keine NS von $p(\lambda)$
Bsp.: - $e^{5x(3+2x)}$ - x^2+1	$e^{px}(\beta_0+\beta_1x+...+\beta_mx^m)*x^k$ falls p k-fache NS von $p(\lambda)$ **RESONANZ**
$e^{px}(\alpha_0+\alpha_1x+...+\alpha_mx^m)$ (cos qx,sin qx)	$e^{px}(\beta_0+\beta_1x+...+\beta_mx^m)\cos(qx)+$ $e^{px}(\gamma_0+\gamma_1x+...+\gamma_mx^m)\sin(qx)$ falls p+jq keine NS von $p(\lambda)$
Bsp.: - $e^{2x}x^2\sin 3x$ - x cos x - cos 3x + sin 3x	$x^ke^{px}(\beta_0+\beta_1x+...+\beta_mx^m)$ $x^ke^{px}(\gamma_0+\gamma_1x+...+\gamma_mx^m)$ falls p+jq k-fache NS von $p(\lambda)$ **RESONANZ**

Fourier-Reihen:

Fourier-Reihe von 2π-periodischen Funktionen:

Dirichletsche Bedingungen:
- Das Periodenintervall läßt sich in endlich viele Teilintervalle zerlegen, in denen f(x) stetig und monoton ist
- In den Unstetigkeitsstellen existiert sowohl der links- als auch der rechtsseitige Grenzwert (**Funktionswert = arithmetisches Mittel dieser 2 Grenzwerte**)
  → f(x) konvergent in kompletten Intervall

allgemein: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k * \cos(kx) + b_k * \sin(kx))$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$

f gerade: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k * \cos(kx)$ mit $a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(kx)dx$ (Achsensymetrisch)

f ungerade: $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k * \sin(kx)$ mit $b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(kx)dx$ (Punktsymetrisch)

Fourier-Reihe von p-periodischen Funktionen: (beliebige Periodenintervalle)

allgemein: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k * \cos(\omega kx) + b_k * \sin(\omega kx))$ $\omega = \frac{2\pi}{P}$ $\cos(n\pi) = (-1)^n$, $\sin(n\pi) = 0$

$a_0 = \frac{2}{p}\int_0^{P} f(x)dx \qquad a_k = \frac{2}{p}\int_0^{P} f(x)\cos(\omega kx)dx \quad b_k = \frac{2}{p}\int_0^{P} f(x)\sin(\omega kx)dx$

f gerade: $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k * \cos(\omega kx)$ mit $a_k = \frac{4}{P}\int_0^{\frac{P}{2}} f(x)\cos(\omega kx)dx$ $(\int x^2\cos kx = \frac{x^2\sin xk}{k} + \frac{2x\cos kx}{k^2} - \frac{2\sin kx}{k^3})$

f ungerade: $f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k * \sin(\omega kx)$ mit $b_k = \frac{4}{P}\int_0^{\frac{P}{2}} f(x)\sin(\omega kx)dx$ $(\int x^2\sin kx = \frac{-x^2\cos xk}{k} + \frac{2x\sin kx}{k^2} + \frac{2\cos kx}{k^3})$

Fourier-Reihe in spektraler Darstellung:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k * \cos(\omega kx) + b_k * \sin(\omega kx)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\omega kx + \varphi_k)$$

Amplitude $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ Phasenverschiebung $\varphi_k = \arctan\frac{a_k}{b_k}$ (Amplitudenspektrum,Phasenspektrum)

Kegelschnitte : $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$

A=B : Kreis
A=0 oder B=0 : Parabel
sgn(A) ≠ sgn(B) : Hyperbel, sonst Ellipse

Kreis: $x^2+y^2=r^2$, Hauptform: $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$

Ellipse: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Hauptform: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Hyperbel: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ Hauptform: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$

Parabel: $y^2=2px$ Hauptform: $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$

p : nach rechts oder links geöffnet

Trigonometrische Funktionen:

Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2}ab\cdot\sin\gamma$ **e = 2.718281828**

Additionstheoreme:

$\sin(x_1 + x_2) = \sin x_1\cdot\cos x_2 + \cos x_1\cdot\sin x_2$

$\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1\cdot\cos x_2 + \sin x_1\cdot\sin x_2$

Folgerungen: $\sin 2x = 2\sin x\cdot\cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin x_1 + \sin x_2 = 2\sin\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos\frac{x_1-x_2}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos x_1 + \cos x_2 = 2\cos\frac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos\frac{x_1-x_2}{2}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Hyperbelfunktionen:

$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$\mathbf{\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1}$

Grenzwerte :

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n} = 0$ $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{k}{n})^n = e^k$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Integration: Quotientenr.: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

Partielle Integration: $\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$

Integration von Partialbrüchen:

(1) $\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + C, x \neq a$

(2) $\int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + C, n \geq 2, x \neq a$

(3) $\int \frac{1}{x^2+px+q} dx = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} \arctan \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$

<u>Integration rationaler Funktionen:</u> $r(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$

a) Polynomdivision, falls Fkt. nicht echt gebrochen
b) Nullstellen des Nenners bestimmen

➔**Reelle Produktdarstllg.:** $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x)}{(x...)(...)}$

c) Ansatz der Partialbrüche:

Bsp.: $\frac{x^2+2}{(x+1)^2 \cdot (x^2+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$

d) Bestimmung der unbestimmten Koeffizienten:
aus c) =>

$x^2+2 = (A(x+1)+B)(x^2+1)^2 \cdot ((Cx+D)(x^2+1)+Ex+F)(x+1)^2$

Einsetzen geeigneter Werte für x, um Werte für A, B,... zu bekommen.
e) Werte:
von A, B,... in Partialbrüche **<u>einsetzen und</u>** jeden Part.bruch **<u>integrieren</u>**.

Integration einiger nichtrationaler Funktionen:

Integral: Substitution:

$\int r(e^x) dx$ $t = e^x$ $x = \ln t$ $dx = \frac{1}{t} dt$

$\int r(\sin x, \cos x) dx$

$t = \tan \frac{x}{2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2}{1+t^2} dt$

$\int r(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$ $x = a \cdot \sin t$ $dx = a \cdot \cos t dt$

Kurvendiskusion:

Krümmungsverhalten: konvex: -f' in I streng monoton wachsend
-f''(x)>0 für alle x in I
Konvex: -f' in I streng monoton fallend
-f''(x)<0 für alle x in I

Extremwerte:

rel.Extremwert : f(x)==0 => x_0
$f'(x_0)=f''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
n ungerade: f hat in x_0 kein Extremum (**Sattelpunkt**)
n gerade: - $f^{(n)}(x_0)<0$ => rel. Maximum
- $f^{(n)}(x_0)>0$ => rel. Minimum

Wendepunkt: $f''(x_0)=f'''(x_0)=...=f^{(n-1)}(x_0)=0$ und $f^{(n)}(x_0) \neq 0$
n ungerade=> x_0 Wendepunkt fon f

Vektorrechnung:

linear abhängig : **nicht** alle Faktoren der Vektoren gleich Null => Summe der Vektoren gleich Nullvektor . $\vec{b} = \alpha \cdot \vec{b}$

linear unabhängig : alle Faktoren der Vektoren gleich Null => Summe der Vektoren gleich Nullvektor

kollinear : Vektoren, die parallel bzw. antiparallel zueinander sind $(\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0})$,d.h. linear abhängig

komplanar : Vektoren, die in einer Ebene liegen $[\vec{a}\, \vec{b}\, \vec{c}] = 0$
=> Vektoren linear abhängig

Basis im Raum : Drei linear unabhängige Vektoren : (Gleichungssystem)

orthogonal : Basis, bei der alle Vektoren senkrecht zueinander sind $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$

normiert : Basis, bei der alle Vektoren den Betrag 1 haben

Richtungswinkel: Winkel zwischen Vektor und Ebene

Skalarprodukt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ **senkrect => 0**

$\varphi = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ (Schnittwinkel zweier Geraden)

Vektorprodukt:

$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$ **Parallel bzw. antiparallel => 0**

$|\vec{a} \times \vec{b}|$ ist gleich dem Flächeninhalt des von den beiden Vektoren aufgespannten Parallelogramms

Rechenregeln:

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ **nicht bei V^n**

Abstand 2er Punkte: $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2$

Quadratische Gleichung:

ABC-Formel: $ax^2 + bx + c = 0$

$\mathbf{x_{1,2}} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

PQ-Formel: $x^2 + px + q = 0$

$\mathbf{x_{1,2}} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Zweipunkteformel: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

Tabelle von einigen Taylorreihen: (Benutzung durch Substitution nur bei Entwicklungspunkt von 0)

$e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$	$\ln x = \frac{x-1}{1} - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots$ 0<x≤2
$\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$	$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$
$\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$	$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots$
$(1+x)^\alpha = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = 1 + \binom{\alpha}{1} x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots$	$\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$
$\ln\lvert 1-x \rvert = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$,da $\int \frac{1}{1-x} dx = -\ln\lvert 1-x \rvert + c$	$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n x^{n+1}$