Kapitel 3

Grundlagen der Wechselstromtechnik

3.1 Einführung

3.1.1 Vorbemerkungen, die Wechselgrößen

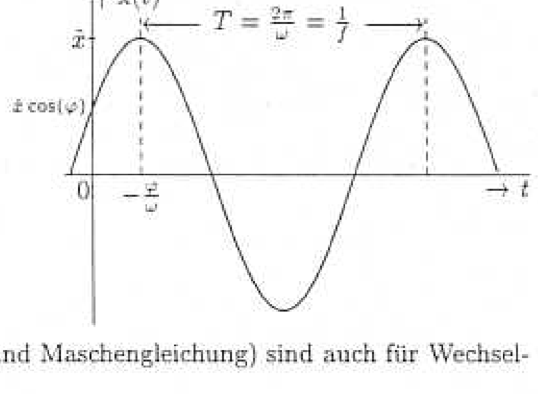
In der Elektrotechnik befaßt man sich vorwiegend mit zeitlich veränderlichen Strömen und Spannungen. In der Informationstechnik sind diese zeitlich veränderlichen Größen die Träger der Informationen. Die klassische Wechselstromtechnik beschränkt sich auf den Sonderfall periodisch verlaufender Signale, in der Regel sogar auf rein sinusförmige Ströme und Spannungen.

Ist $x(t)$ entweder eine Spannung oder ein Strom, dann gilt

$$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t + \varphi).$$

$\hat{x}$ ist die *Amplitude* der Wechselgröße, $\omega = 2\pi f$ die *Kreisfrequenz* in s^{-1}, f die *Frequenz* in s^{-1} oder Hz (Hertz). φ nennt man den *Nullphasenwinkel* oder auch kurz die *Phase*. Der Name Nullphasenwinkel kommt daher, daß durch φ der Signalwert $x(0) = \hat{x} \cdot \cos(\varphi)$ festgelegt wird. Schließlich ist $T = 1/f$ die Periodendauer der sinusförmigen Wechselgröße.

In dem Bild ist ein sinusförmiges Signal mit den besprochenen Größen dargestellt. Mit $\varphi = 0$ erhält man eine reine Kosinusschwingung $x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t)$. Der Fall $\varphi = -\pi/2$ führt zu einer Sinusschwingung
$x(t) = \hat{x} \cdot \cos(\omega t - \pi/2) = \hat{x} \cdot \sin(\omega t)$.



Die beiden Kirchhoffschen Gesetze (Knotenpunkt- und Maschengleichung) sind auch für Wechselstromgrößen, ja sogar für ganz beliebig verlaufende Signale gültig:

$$\sum_{\mu} i_{\mu}(t) = 0, \ \sum_{\nu} u_{\nu}(t) = 0, \text{ für alle } t.$$

Ebenfalls gilt für einen Widerstand das Ohmsche Gesetz

$$u(t) = R \cdot i(t), \ i(t) = G \cdot u(t), \ G = 1/R.$$

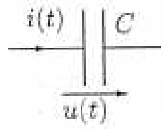
Bei Netzwerken, die nur aus Widerständen aufgebaut sind, können die Ergebnisse der Gleichstromtechnik ohne jede Einschränkung übernommen werden. Dort sind lediglich die konstanten Spannungen durch die zeitabhängigen und die Gleichströme durch die zeitabhängigen Ströme zu ersetzen.

Neben dem elektrischen (Ohmschen) Widerstand spielen in der Wechselstromtechnik zwei weitere Bauelemente, der Kondensator und die Spule eine wichtige Rolle. Diese beiden Bauelemente werden nun in kurzer Form eingeführt. Grundkenntnisse über das elektrische und magnetische Feld werden dabei vorausgesetzt (Schule, Physikvorlesung an der FHW.)

3.1.2 Das Bauelement Kondensator

3.1.2.1 Grundbeziehungen

Bei einem Kondensator mit der Kapazität C besteht zwischen Spannung und Strom der Zusammenhang



$$u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\, d\tau, \text{ bzw. } i(t) = C \frac{d\,u(t)}{d\,t}.$$

Rechts ist das Schaltungssymbol für den Kondensator dargestellt. Aus der Beziehung $i = C \cdot du/dt$ erkennt man, daß C die Einheit As/V hat. Diese Einheit wird oft auch mit $1\,As/V = 1\,F$ (Farad) bezeichnet. In der Praxis arbeitet man mit Vorsatzzeichen, z.B. $1\,nF$, $1\,\mu F$.

Aus der Eigenschaft, daß der durch einen Kondensator fließende Strom (bis auf den Faktor C) die Ableitung der am Kondensator anliegenden Spannung ist, folgt die sehr wichtige Erkenntnis:

Die Kondensatorspannung muß stetig verlaufen, sie kann sich nicht sprungförmig ändern.

Eine Kondensatorspannung, die sich z.B. bei $t = 0$ von $u = 0$ "sprungförmig" auf $u = 1$ V ändern würde, hätte einen unendlich großen Strom zur Folge. Physikalisch würde dies zu einer Zerstörung der Schaltung führen. Selbstverständlich muß, genauer formuliert, $u(t)$ nicht nur stetig, sondern differenzierbar sein.

Wir nehmen nun an, daß es sich bei dem Strom $i(t)$ um einen (ausreichend schnell) abnehmenden Strom ($i(t) \to 0$ für $t \to \infty$) handelt. Dann läd sich der Kondensator auf eine Spannung

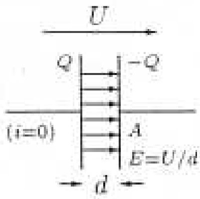
$$u(\infty) = U = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^{\infty} i(\tau)\, d\tau = \frac{Q}{C}$$

auf. Das Integral kann als eine Ladung Q interpretiert werden. Zwischen der Ladung Q und der Kondensatorspannung U besteht nach Beendigung des "Aufladevorganges" ($i(t) = 0!$) der wichtige

Zusammenhang

$$Q = C \cdot U.$$

Die einfachste Bauform eines Kondensators ist der *Plattenkondensator* (rechtes Bild). Er besteht aus zwei "Platten" der Fläche A in einem i.a. sehr kleinen Abstand d. Zwischen den Platten befindet sich ein nichtleitendes Material. Die Kapazität einer solchen Anordnung berechnet sich nach der Beziehung



$$C = \frac{A\varepsilon}{d}.$$

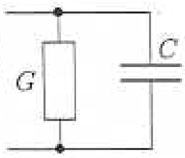
ε ist die *Dielektrizitätskonstante.* Für das Vakuum gilt $\varepsilon = \varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$. Für andere Stoffe setzt man $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ mit der relativen Dielektrizitätskonstanten ε_r. Für das Vakuum ist natürlich $\varepsilon_r = 1$, für Papier gilt $\varepsilon_r = 2 \ldots 5$.

Beispiel:
Nach der oben angegebenen Beziehung hat ein Plattenkondensator mit der Plattenfläche $A = 1\,m^2$, dem Plattenabstand $d = 0,1$ mm und $\varepsilon = \varepsilon_0$ die Kapazität $88,5 \cdot 10^{-9}$ F = 88,5 nF.

Bei dem auf die Spannung U aufgeladenen Kondensator befindet sich auf den "Platten" die Ladung $Q = C \cdot U$. Diese Ladung ist die Ursache für das zwischen den Platten vorhandene elektrische Feld mit der Feldstärke $E = U/d$. Der Kondensator ist ein *Energiespeicher* für elektrische Energie (ohne Beweis: $W = 0,5 \cdot C \cdot U^2$).

Ein einmal auf die Spannung U aufgeladener Kondensator würde seine Spannung unendlich lange "halten", wenn das Dielektrikum, das Material zwischen den Platten, ein idealer Nichtleiter wäre. Bei realen Kondensatoren ist dies natürlich nicht der Fall. Zwischen den Platten befindet sich kein idealer Nichtleiter, so daß ein Ladungsausgleich möglich wird und sich der Kondensator (langsam) entläd.

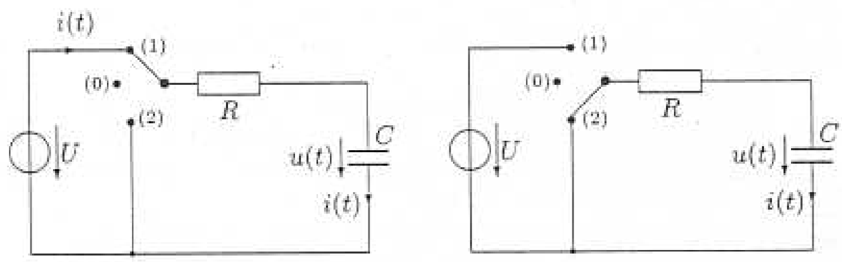
Ein realer Kondensator wird daher durch die rechts skizzierte Ersatzschaltung dargestellt. Parallel zu dem als ideal angenommenen Kondensator befindet sich ein sehr kleiner Leitwert, durch den ein Ladungsausgleich erfolgt.



3.1.2.2 Der Lade- und der Entladevorgang

Wir wollen hier kurz untersuchen, wie und in welcher Zeit ein Kondensator aufgeladen werden kann und wie der Entladevorgang vor sich geht. Dazu betrachten wir zunächst die unten links skizzierte Schaltung.

Ladevorgang:
Schalterstellung 1
Entladevorgang:
Schalterstellung 2



Der Aufladevorgang

Ein zunächst nicht aufgeladener Kondensator wird bei $t = 0$ über einen Widerstand R an eine Spannungsquelle mit der *Gleichspannung* U angeschlossen (Schalterstellung 1). Dann lautet die Maschengleichung $U = i(t) \cdot R + u(t)$. Der Strom $i(t)$ fließt durch den Kondensator, also gilt $i(t) = C\frac{du}{dt}$ und wir erhalten die Differentialgleichung

$$RC\frac{d\,u(t)}{dt} + u(t) = U.$$

Die Lösung der Differentialgleichung setzt sich aus einer homogenen Lösung $u_h(t)$ und einer stationären Lösung $u_{st}(t)$ zusammen.

Homogene Lösung:

$$RC\frac{d\,u_h(t)}{dt} + u_h(t) = 0, \text{ Ansatz: } u_h(t) = K \cdot e^{pt}.$$

Mit $d\,u_h(t)/dt = Kp \cdot e^{pt}$ erhält man

$$RCpKe^{pt} + Ke^{pt} = 0,\ RCp + 1 = 0,\ p = -\frac{1}{RC},\ u_h(t) = K \cdot e^{-t/(RC)}.$$

Stationäre Lösung:

$$RC\frac{d\,u_{st}(t)}{dt} + u_{st}(t) = U, \text{ Ansatz und Lösung: } u_{st}(t) = U.$$

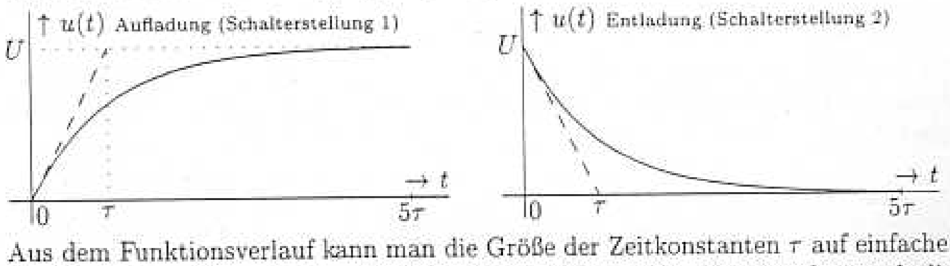
Gesamtlösung der Differentialgleichung

$$u(t) = u_h(t) + u_{st}(t) = K \cdot e^{-t/(RC)} + U.$$

Zur Festlegung der Konstanten K ist zu beachten, daß der Kondensator bis zum Zeitpunkt $t = 0$ ungeladen war. Dies bedeutet $u(0) = 0 = K + U$, also $K = -U$ und somit gilt im Zeitbereich $t \geq 0$

$$u(t) = U \cdot (1 - e^{-t/(RC)}) = U \cdot (1 - e^{-t/\tau}), \text{ Zeitkonstante: } \tau = RC.$$

Das Produkt $\tau = RC$ nennt man die *Zeitkonstante*. Links unten ist der Verlauf der Spannung am Kondensator beim Ladevorgang aufgetragen.



Aus dem Funktionsverlauf kann man die Größe der Zeitkonstanten τ auf einfache Weise erkennen. Die Funktion $u(t)$ hat bei $t = 0$ die Steigung $u'(0) = U/\tau$. Dies ist aber auch die Steigung der in dem Bild gestrichelt eingetragenen Geraden. Diese Gerade (Tangente an $u(t)$ bei $t = 0$) erreicht zum Zeitpunkt $t = \tau$ den Wert U.

Theoretisch dauert es unendlich lange bis der Kondensator voll auf die Spannung $u(\infty) = U$ aufgeladen ist. Nach der Dauer von einer Zeitkonstanten ist der Kondensator auf $u(\tau) = U(1 - e^{-1}) \approx 0,63 \cdot U$ aufgeladen. Nach drei Zeitkonstanten wird der Wert $u(3\tau) = U(1 - e^{-3}) \approx 0,95 \cdot U$

erreicht und nach einer Dauer von fünf Zeitkonstanten beträgt der Spannungswert am Kondensator $u(5\tau) = U(1 - e^{-5}) \approx 0,993 \cdot U$. In der Praxis sagt man, daß ein Kondensator nach etwa 5 Zeitkonstanten aufgeladen ist.

Der Ladestrom $i(t)$ wird während des Aufladevorganges immer kleiner

$$i(t) = C\frac{d\,u(t)}{dt} = C\frac{d}{dt}\{U(1 - e^{-t/\tau})\} = \frac{C}{\tau}Ue^{-t/\tau} = \frac{U}{R}e^{-t/\tau}.$$

Der Anfangswert beträgt $i(0) = \frac{U}{R}$, nach 5 Zeitkonstanten ist der Ladestrom auf $i(5\tau) = \frac{U}{R}e^{-5} \approx 0,0067 \cdot i(0)$ abgeklungen.

Nach einiger Zeit ist der Kondensator auf die Spannung U aufgeladen, es fließt kein Strom mehr. Der Schalter kann jetzt in die Stellung "0" umgelegt werden. Wenn es sich um einen völlig verlustfreien Kondensator handeln würde, würde der Kondensator die Spannung U unbegrenzt lange "halten".

Der Entladevorgang

Nachdem der Kondensator auf die Spannung U aufgeladen worden ist, wird der Schalter in die untere Stellung "2" gebracht. Dabei entsteht die Anordnung im rechten Bildteil (1. Bild dieses Abschnittes). Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Entladevorgang bei $t = 0$ beginnt. Im Zeitbereich $t \geq 0$ fließt dann durch den Widerstand ein Entladestrom. Die Maschengleichung lautet $R \cdot i(t) + u(t) = 0$. Mit $i(t) = C\frac{du}{dt}$ erhält man die den Entladevorgang beschreibende Differentialgleichung

$$RC\frac{d\,u(t)}{dt} + u(t) = 0.$$

Mit dem Lösungsansatz $u(t) = Ke^{pt}$ erhält man

$$RCpKe^{pt} + Ke^{pt} = 0,\ p = -\frac{1}{RC} = -\frac{1}{\tau},\ u(t) = Ke^{-t/\tau}.$$

Mit der Anfangsbedingung $u(0) = U$ erhält man $K = U$ und damit im Zeitbereich $t \geq 0$

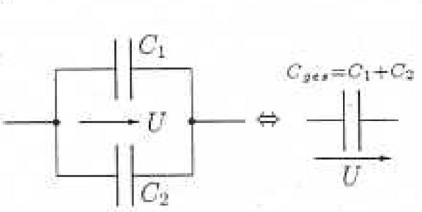
$$u(t) = U \cdot e^{-t/\tau},\ \tau = RC.$$

Im rechten Bildteil (oben) ist der Verlauf der Entladespannung skizziert. Aus dem Verlauf kann ebenfalls die Größe der Zeitkonstanten τ entnommen werden. Dazu wird bei $t = 0$ eine Tangente an $u(t)$ gelegt. Die Tangente schneidet bei $t = \tau$ die Zeitachse. Nach etwa 5 Zeitkonstanten ist der Kondensator weitgehend entladen $u(5\tau) \approx 0,0067 \cdot U$.

3.1.2.3 Die Zusammenschaltung von Kondensatoren

Parallelschaltung von Kondensatoren

Die Kondensatoren im linken Bildteil sind beide auf die gleiche Spannung U aufgeladen. Dies bedeutet die Ladungen $Q_1 = C_1 \cdot U$ und $Q_2 = C_2 \cdot U$. Die Gesamtladung hat also den Wert $Q = Q_1 + Q_2 = U \cdot (C_1 + C_2)$. Daraus folgt, daß die parallelgeschalteten Kondensatoren durch



einen Kondensator mit der Kapazität $C_{ges} = C_1 + C_2$ ersetzt werden können. (rechter Bildteil).

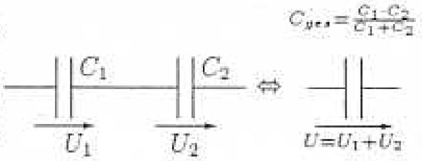
Ergebnis:

Bei der Parallelschaltung von Kondensatoren können die Kapazitäten addiert werden

$$C_{ges} = C_1 + C_2 + \ldots C_n.$$

Reihenschaltung von Kondensatoren

Die Verbindung zwischen den Kondensatoren bedingt, daß die Ladung Q auf beiden Kondensatoren gleich groß sein muß. Im anderen Fall würde in der Verbindungsleitung zwischen den Kondensatoren solange ein Ausgleichstrom fließen, bis die Ladungen gleich sind.



Es gilt also $Q = C_1 \cdot U_1 = C_2 \cdot U_2$. Die Gesamtspannung hat dann den Wert

$$U = U_1 + U_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = \frac{Q}{C_{ges}}.$$

Aus dieser Beziehung folgt bei der Reihenschaltung von zwei Kondensatoren

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}, \; C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}.$$

Ergebnis: Bei der Reihenschaltung von Kondensatoren wird

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}.$$

3.1.3 Das Bauelement Spule

Bei einer Spule mit der Induktivität L besteht zwischen Strom und Spannung der Zusammenhang

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{t} u(\tau)\, d\tau, \text{ bzw. } u(t) = L \frac{d\, i(t)}{dt}.$$

Rechts ist das Schaltungssymbol für die Spule dargestellt. Aus der Beziehung $u = L \cdot di/dt$ erkennt man, daß L die Einheit Vs/A hat. Diese Einheit wird oft auch mit $1\, Vs/A = 1\, H$ (Henry) bezeichnet.

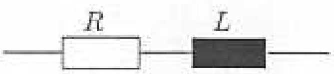
Aus der Eigenschaft, daß die an einer Spule auftretende Spannung (bis auf den Faktor L) die Ableitung des Stromes durch die Spule ist, folgt die sehr wichtige Erkenntnis:

Der Strom in einer Spule muß stetig verlaufen, er kann sich nicht sprungförmig ändern.

Ein Spulenstrom, der sich z.B. bei $t = 0$ von $i = 0$ "sprungförmig" auf $i = 1$ A ändern würde, hätte eine unendlich große Spannung zur Folge. Physikalisch würde dies zu einer Zerstörung der Schaltung führen. Selbstverständlich muß, genauer formuliert, $i(t)$ nicht nur stetig, sondern differenzierbar sein.

Bei einer "idealen Spule" bewirkt ein konstanter Spulenstrom I nach der Beziehung $u = L\, di/dt$ keinen Spannungsabfall an der Spule, also $U = 0$. Dieser Strom erzeugt in der Spule ein magnetisches Feld mit dem magnetischen Fluß $\Phi = L \cdot I$. Die Spule ist ein Energiespeicher für magnetische Energie (ohne Beweis: $W = 0,5 L I^2$)

Eine reale Spule kann oft näherungsweise durch eine Reihenschaltung einer idealen Spule und einem "Verlustwiderstand" R angenähert werden. Dieser Widerstand ist bei hochwertigen Spulen sehr klein.



Für eine Zylinderspule der Länge l, dem Durchmesser d und w Windungen berechnet sich die Induktivität nach der Formel

$$L = \mu w^2 \frac{\pi d^2}{4l}.$$

Darin ist μ die *Permeabilitätskonstante*. Für das Vakuum gilt $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am. Für andere Stoffe setzt man $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$. Die relative Permeabilitätskonstante μ_r hat für das Vakuum den Wert 1, ansonsten kann μ_r sehr groß werden, z.B. 10^2 bis 10^5 bei ferromagnetischen Stoffen.

Beispiel:
Mit der oben angegebenen Beziehung erhält man für eine Spule von 4 cm Länge, einem Durchmesser von 5 mm und 1000 Windungen bei $\mu_r = 1$ (Luftspule) eine Induktivität von $L = 61,67 \cdot 10^{-5}$ H = 0,6167 mH. Bei einem Eisenkern mit $\mu_r = 10^3$ erhält man eine Induktivität $L = 0,6167$ H.

Auf ganz ähnliche Weise wie bei den Kondensatoren kann man ableiten, daß sich die Induktivitäten bei einer Reihenschaltung addieren:

$$L_{ges} = L_1 + L_2 + \ldots + L_n, \text{ Reihenschaltung.}$$

Bei parallelgeschalteten Induktivitäten gilt

$$\frac{1}{L_{ges}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots + \frac{1}{L_n}, \text{ Parallelschaltung.}$$

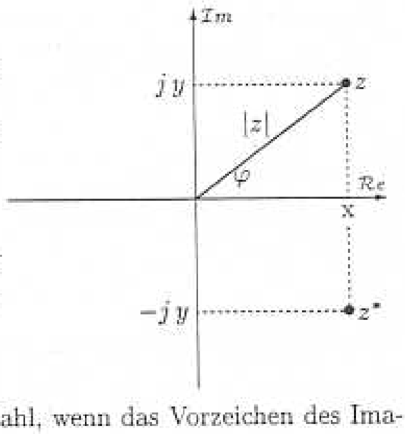
Im Sonderfall von zwei parallelgeschalteten Induktivitäten erhält man aus dieser Gleichung die Gesamtinduktivität

$$L_{ges} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}.$$

3.1.4 Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen können durch *komplexe Zeiger* in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt werden. Die Maßeinheit an der reellen Achse ist 1, an der imaginären Achse $j = \sqrt{-1}$. Dabei gilt

$$\frac{1}{j} = \frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}} = -\sqrt{-1} = -j,\ j^2 = -1,\ j^3 = -j,\ j^4 = 1,\ j^5 = j \text{ usw.}$$



Eine komplexe Zahl hat die Form $z = x + j\,y$, $x = \mathcal{R}e\,z$ ist der Realteil der komplexen Zahl und $y = \mathcal{I}m\,z$ der Imaginärteil. Neben der Form von Real- und Imaginärteil ist die Darstellung

$$z = |z| \cdot e^{j\varphi} \text{ mit } |z| = \sqrt{x^2 + y^2},\ \varphi = \arctan\frac{y}{x}$$

mit Betrag und Phase möglich. Bei dem Phasenwinkel ist darauf zu achten, in welchem Quadranten die komplexe Zahl liegt (Vieldeutigkeit der Funktion arctan (φ) !)

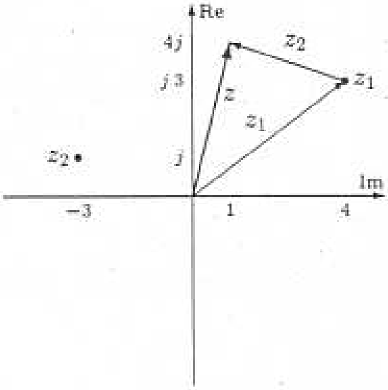
Eine konjugiert komplexe Zahl entsteht aus einer komplexen Zahl, wenn das Vorzeichen des Imaginärteiles geändert wird. Es gilt

$$z = x + j\,y,\ z^* = x - j\,y,$$

$$x = \mathcal{R}e\,z = \tfrac{1}{2}(z + z^*),\ y = \mathcal{I}m\,z = \tfrac{1}{2j}(z - z^*),\ |z|^2 = z \cdot z^* = x^2 + y^2.$$

Bei der Addition komplexer Zahlen geht man am besten von der Darstellung in der Form von Real- und Imaginärteil aus.

Beispiel:
$z_1 = 4 + j\,3$, $z_2 = -3 + j$, $z = z_1 + z_2 = 1 + j\,4$. Die Addition kann in der Gaußschen Zahlenebene als Vektoraddition interpetiert werden, wie dies rechts im Bild dargestellt ist.



Zur Vorbereitung für das folgende Beispiel stellen wir z_1 und z_2 noch nach Betrag und Phase dar. Es gilt $z_1 = |z_1| \cdot e^{j\varphi_1}$ mit $|z_1| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $\varphi_1 = \arctan 3/4 = 0,6435$, dies ist ein Winkel von $36,87\,^o$. Entsprechend wird $z_2 = |z_2| \cdot e^{j\varphi_2}$ mit $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = 3,1623$. Bei der Berechnung von φ_2 muß man aufpassen. Die Beziehung $\arctan(y/x)$ liefert hier den Winkel $\arctan(-1/3) = -0,322$, dies sind $-18,43\,^o$. Wie zu erkennen ist, liegt z_2 im 2. Quadranten der komplexen Ebene, der tatsächliche Winkel ist also $180\,^o - 18,43\,^o = 161,6\,^0$. Im Bogenmaß wird $\varphi_2 = 2,82$ und damit wird $z_2 = 3,1623 \cdot e^{j\,2.82}$.

Bei der Multiplikation und Division empfiehlt sich die Darstellung in Form von Betrag und Phase.

Beispiel: $z_1 = 4 + 3\,j = 5 \cdot e^{j0.6435}$, $z_2 = -3 + j = 3,162 \cdot e^{j\,2.82}$

$$z = z_1 \cdot z_2 = 5 \cdot 3,162 \cdot e^{j(0,6435+2,82)} = 15,81 \cdot e^{j\,3,463}.$$

Die Beträge werden multipliziert, die Winkel addiert. Bei der Division

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{3,162} e^{j(0,6435-2,82)} = 1,58 \cdot e^{-j\,2,176}$$

werden die Beträge dividiert und die Winkel voneinander subtrahiert.

Häufig treten Ausdrücke der Form

$$z = \frac{a + jb}{c + jd}$$

auf und es sind der Real- und Imaginärteil, oder auch der Betrag und Phasenwinkel von z gesucht.

Zur Bestimmung des Real- und Imaginärteiles wird z zunächst mit dem konjugiert komplexen Nenner $c - jd$ erweitert

$$z = \frac{a + jb}{c + jd} = \frac{a + jb}{c + jd} \cdot \frac{c - jd}{c - jd} = \frac{(ac + bd) + j(bc - ad)}{c^2 + d^2}.$$

Daraus findet man den Real- und Imaginärteil

$$\mathcal{R}ez = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2},\ \mathcal{I}m\,z = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}.$$

Zur Bestimmung des Betrages und Phasenwinkels schreibt man am besten

$$z_1 = a + jb = \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{j\varphi_1}, \ \varphi_1 = \arctan(b/a),$$

$$z_2 = c + jd = \sqrt{c^2+d^2} \cdot e^{j\varphi_2}, \ \varphi_2 = \arctan(d/c).$$

Dann wird

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}\, e^{j\varphi_1}}{\sqrt{c^2+d^2}\, e^{j\varphi_2}} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}} e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}$$

und daraus folgt

$$|z| = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{c^2+d^2}}, \ \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Bei der Ermittlung der Winkel φ_1 und φ_2 ist zu beachten, in welchen Quadranten der Gaußschen Zuahlenebene die Zahlen z_1 und z_2 liegen (Vieldeutigkeit der Funktion $\arctan(x)$!).

Von großer Bedeutung in der Elektrotechnik ist die *Eulersche Gleichung*

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\,\sin(\varphi),$$

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{2}e^{j\varphi} + \frac{1}{2}e^{-j\varphi}, \ \sin(\varphi) = \frac{1}{2j}e^{j\varphi} - \frac{1}{2j}e^{-j\varphi}, \ |e^{j\varphi}| = \sqrt{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} = 1.$$

Zum Beweis dieser Gleichung kann man von der Taylorreihenentwicklung der Funktion

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots$$

ausgehen. Man erhält dann

$$e^{j\varphi} = 1 + (j\varphi) + \frac{(j\varphi)^2}{2!} + \frac{j(\varphi)^3}{3!} + \frac{(j\varphi)^4}{4!} + \ldots =$$

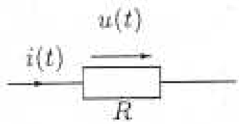
$$1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots \ + j \cdot \left\{\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right\} = \cos(\varphi) + j\,\sin(\varphi).$$

Die 1. Gleichung in der 2. Gleichungszeile ist die Taylorreihe für die Kosinusfunktion und die 2. Reihe die für die Sinusfunktion. Bei der Rechnung ist zu beachten, daß $j^2 = -1$, $j^3 = -j$ usw. ist.

3.2 Die komplexe Rechnung in der Wechselstromtechnik

3.2.1 Effektivwerte

Durch einen Ohmschen Widerstand R soll ein sinusförmiger Strom



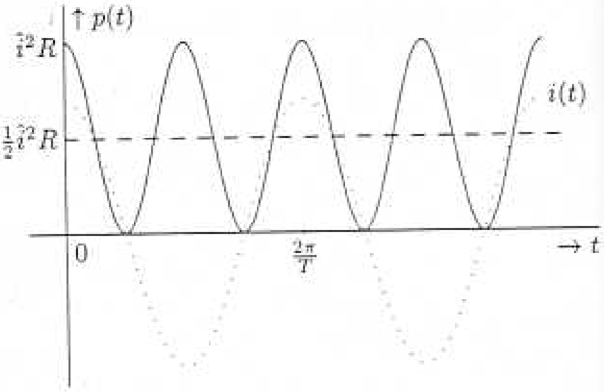
$$i(t) = \hat{i}\,\cos(\omega t + \varphi)$$

fließen.

Dann ist nach dem Ohmschen Gesetz $u(t) = R \cdot i(t) = R\,\hat{i}\,\cos(\omega t + \varphi)$ und die *Augenblicksleistung beträgt*

$$p(t) = i(t) \cdot u(t) = R \cdot \hat{i}^2 \cos^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} R\hat{i}^2 + \frac{1}{2} R\,\hat{i}^2 \cos(2\omega t + 2\varphi).$$

Dieser Verlauf der Augenblicksleistung $p(t)$ ist rechts (im Fall $\varphi = 0$) skizziert und gestrichelt zusätzlich der Verlauf von $i(t)$. Man erkennt, daß p(t) die doppelte Frequenz 2ω wie der Strom $i(t)$ hat. Die Augenblicksleistung schwankt in dem Bereich von 0 bis $\hat{i}^2 R$.
In den meisten Fällen interessiert nur der zeitliche Mittelwert P dieser Leistung. Aus dem Bild, aber auch aus der rechten Form der oben angegebenen Beziehung für $p(t)$, erkennt man, daß die mittlere Leistung den Wert



$$P = \frac{1}{2}\hat{i}^2 R$$

hat. Diesen Mittelwert kann man natürlich auch formal berechnen, indem man die Fläche unter $p(t)$ im Bereich einer Periode ermittelt und durch die Periodendauer dividiert:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T R\,\hat{i}^2 \cos^2(\omega t + \varphi)\, dt = \frac{1}{2}\hat{i}^2 R.$$

Die Auswertung des Integrales soll dem Leser überlassen werden, dabei ist der Zusammenhang $T = 2\pi/\omega$ zu beachten.

Man definiert nun den *Effektivwert* des Stromes

$$I_{eff} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i}$$

und erhält mit diesem Effektivwert die mittlere Leistung

$$P = \frac{1}{2}\hat{i}^2 R = I_{eff}^2 R.$$

Dies bedeutet, daß ein Wechselstom mit dem Effektivwert I_{eff} eine gleichgroße Leistung wie ein Gleichstrom der Göße $I = I_{eff}$ zu Folge hat.

Effektivwerte definiert man nicht nur bei Strömen, sondern auch bei Spannungen. Es gilt

$$I_{eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i},\ U_{eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}.$$

Bei dem Widerstand war $u(t) = R \cdot i(t) = R \cdot \hat{i}\cos(\omega t + \varphi) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi)$ mit $\hat{u} = R\hat{i}$. Dies bedeutet hier $U_{eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u} = R\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i}$. Für die mittlere Leistung erhält man damit auch

$$P = \frac{1}{2}\hat{i}^2 R = I_{eff} \cdot U_{eff},$$

also eine Beziehung wie beim Gleichstrom, wenn dort der Strom und die Spannung durch die Effektivwerte der Wechselgrößen ersetzt werden.

Hinweis:
Die Effektivwerte von Strom und Spannung ergeben sich auch aus den Beziehungen

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2(t)\,dt},\ U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}.$$

Darin ist $T = 2\pi/\omega$ die Periodendauer.

3.2.2 Komplexe Wechselstromgrößen

Zur Erklärung gehen wir von einem sinusförmigen Strom bzw. einer sinusförmigen Spannung

$$i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i),\ \ u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$$

aus. Der Strom und die Spannung haben die Effektivwerte

$$I_{eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i},\ U_{eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}.$$

Mit Hilfe der Beziehung $\cos(x) = \frac{1}{2}e^{jx} + \frac{1}{2}e^{-jx}$ können wir auch schreiben

$$\begin{aligned} i(t) &= \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) = \tfrac{1}{2}\hat{i}e^{j(\omega t+\varphi_i)} + \tfrac{1}{2}\hat{i}e^{-j(\omega t+\varphi_i)} = \\ &= \frac{1}{2}\hat{i}e^{j\varphi_i}\cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{2}\hat{i}e^{-j\varphi_i}\cdot e^{-j\omega t}. \end{aligned}$$

Wir führen nun die *komplexe Amplitude*[1]

$$\hat{I} = \hat{i}\cdot e^{j\varphi_i}$$

ein. Diese komplexe Amplitude $\hat{I}$ faßt die Amplitude $\hat{i}$ von $i(t)$ und den Nullphasenwinkel φ_i zu einer einzigen (komplexen) Zahl zusammen. Dabei gilt $|\hat{I}| = \hat{i}$. Bei einem verschwindenden Nullphasenwinkel $\varphi_i = 0$ stimmt die komplexe mit der wirklichen Amplitude überein, $\hat{I} = \hat{i}$.

Mit dieser so eingeführten komplexen Amplitude erhält man

$$i(t) = \frac{1}{2}\hat{I}\cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{2}\hat{I}^*\cdot e^{-j\omega t} = \mathcal{R}e\{\hat{I}\cdot e^{j\omega t}\}.$$

Die Richtigkeit der ganz rechts stehenden Beziehung wird weiter unten bewiesen.

Ganz entsprechend kann man auch für die Spannung $u(t)$ eine komplexe Amplitude $\hat{U} = \hat{u}\,e^{j\varphi_u}$ definieren und dann gilt

$$u(t) = \frac{1}{2}\hat{U}\cdot e^{j\omega t} + \frac{1}{2}\hat{U}^*\cdot e^{-j\omega t} = \mathcal{R}e\{\hat{U}\cdot e^{j\omega t}\}.$$

[1] Komplexe Amplituden und auch die später eingeführten komplexen Ströme und Spannungen werden in der Elektrotechnik unterstrichen, also $\underline{\hat{I}}$, anstatt wie hier $\hat{I}$. Im Interesse einer einfacheren Schreibweise wird hier auf solche Unterstreichungen verzichtet.

Eine sinusförmige Wechselgröße mit bekannter Kreisfrequenz ω kann offensichtlich durch die zugehörende komplexe Amplitude vollständig beschrieben werden. Wenn z.B. $\hat{I}$ bekannt ist, multipliziert man diese komplexe Amplitude mit $e^{j\omega t}$ und der Realteil dieses komplexen Ausdruckes ist der der zugrundeliegende (reelle) Strom

$$i(t) = \mathcal{R}e\{\hat{I} \cdot e^{j\omega t}\} = \mathcal{R}e\{\hat{i}e^{j\varphi_i} \cdot e^{j\omega t}\} = \mathcal{R}e\{\hat{i}e^{j(\omega t+\varphi_i)}\} =$$

$$= \mathcal{R}e\{\hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i) + j\,\hat{i}\sin(\omega t + \varphi_i)\} = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i).$$

Beispiel 1: $\hat{I} = 2e^{j\pi/2}$

$$i(t) = \mathcal{R}e\{2e^{j\pi/2} \cdot e^{j\omega t}\} = \mathcal{R}e\{2e^{j(\omega t+\pi/2)}\} = 2\cos(\omega t + \pi/2) = -2\sin(\omega t).$$

Beispiel 2: $\hat{U} = 1 + j$

$$u(t) = \mathcal{R}e\{(1+j) \cdot e^{j\omega t}\} = \mathcal{R}e\{(1+j) \cdot [\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)]\} =$$

$$= \mathcal{R}e\{[\cos(\omega t) - \sin(\omega t)] + j[\cos(\omega t) + \sin(\omega t)]\} = \cos(\omega t) - \sin(\omega t).$$

Besserer Lösungsweg: $\hat{U} = 1 + j = \sqrt{2}e^{j\pi/4}$

$$u(t) = \mathcal{R}e\{\sqrt{2}\,e^{j\pi/4} \cdot e^{j\omega t}\} = \mathcal{R}e\{\sqrt{2}\,e^{j(\omega t+\pi/4)}\} = \sqrt{2}\cos(\omega t + \pi/4).$$

Der zuerst ermittelte Ausdruck für $u(t)$ läßt sich mit Hilfe der Beziehung $\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$ in den unten ermittelten umformen.

Welchen Vorteil kann es haben, einen physikalisch anschaulichen Strom $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$ durch eine abstrakte komplexe Amplitude $\hat{I} = \hat{i}e^{j\varphi_i}$ zu beschreiben? Der Grund ist der, daß auf diese Weise die Berechnung von Wechselstromnetzwerken sehr viel einfacher wird. Um einen Eindruck über die Hintergründe für diese Aussage zu vermitteln, betrachten wir einmal eine Knotenpuktgleichung (1. Kirchhoffsches Gesetz) für sinusförmige Ströme. Dann gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n} i_\nu(t) = \sum_{\nu=1}^{n} \hat{i}_\nu \cos(\omega t + \varphi_\nu) = 0 \text{ für alle } t.$$

Mit $i_\nu(t) = 0,5\hat{I}_\nu \cdot e^{j\omega t} + 0,5\hat{I}_\nu^* \cdot e^{-j\omega t}$, $\hat{I}_\nu = \hat{i}_\nu e^{j\varphi_\nu}$ folgt dann

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\hat{I}_\nu e^{j\omega t} + \frac{1}{2}\hat{I}_\nu^* e^{-j\omega t}\right) = \frac{1}{2}e^{j\omega t}\sum_{\nu=1}^{n}\hat{I}_\nu + \frac{1}{2}e^{-j\omega t}\sum_{\nu=1}^{n}\hat{I}_\nu^* = 0.$$

Diese Gleichungen sind offenbar für alle t erfüllt, wenn die Beziehung

$$\sum_{\nu=1}^{n}\hat{I}_\nu = 0$$

gilt. Die letzte Beziehung sieht genau so wie die Knotengleichung bei Gleichstrom aus. Die Gleichströme I_ν werden lediglich durch die komplexen Amplituden $\hat{I}_\nu$ ersetzt.

Ergebnis:

Die komplexen Amplituden erfüllen die Kirchhoffschen Regeln. Damit können alle für die Gleichstromnetzwerke abgeleiteten Analyseverfahren in der Wechselstromtechnik übernommen werden, wenn die Gleichgrößen durch die komplexen Amplituden ersetzt werden.

In der Praxis arbeitet man nicht mit den komplexen Strom- oder Spannungsamplituden, sondern mit dazu proportionalen *komplexen Strömen* und *komplexen Spannungen*. Diese sind folgendermaßen definiert

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \hat{I},\ U = \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \hat{U}.$$

Der Faktor $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ hat zur Folge, daß die Beträge der komplexen Ströme und Spannungen mit den Effektivwerten übereinstimmen

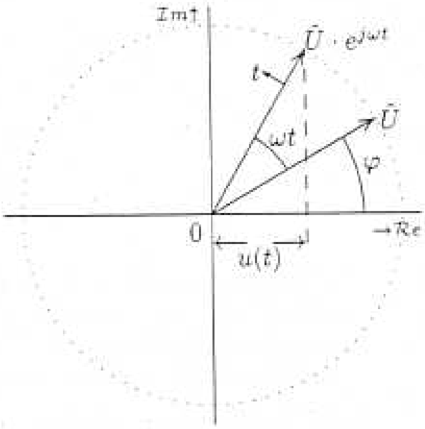
$$|I| = \frac{1}{2}\sqrt{2}|\hat{I}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i} = I_{eff},\ |U| = \frac{1}{2}\sqrt{2}|\hat{U}| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u} = U_{eff}.$$

Dann gilt

$$i(t) = \mathcal{R}e\{\hat{I} \cdot e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \cdot \mathcal{R}e\{I \cdot e^{j\omega t}\},\ u(t) = \mathcal{R}e\{\hat{U} \cdot e^{j\omega t}\} = \sqrt{2} \cdot \mathcal{R}e\{U \cdot e^{j\omega t}\}.$$

Wie erwähnt, ist es in der Elektrotechnik oft üblich, komplexe Größen zu unterstreichen. Im Interesse einer einfacheren Schreibweise wird allerdings auf diese Unterstreichungen verzichtet.

Abschließend wird noch auf eine Möglichkeit zur anschaulichen Erklärung der Zusammenhänge im komplexen und im realen physikalischen Bereich hingewiesen. Wir nehmen an, daß eine komplexe Spannungsamplitude $\hat{U} = \hat{u}e^{j\varphi}$ mit $\varphi = \pi/6$ gegeben ist. Diese komplexe Amplitude ist in dem Bild als Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene eingetragen. Die Multiplikation der komplexen Amplitude mit $e^{j\omega t}$, also $\hat{U} \cdot e^{j\omega t}$ kann so interpetriert werden, daß sich der Zeiger $\hat{U}$ mit der Kreisfrequenz ω im mathematisch positiven Sinne dreht. Die Projektion des Zeigers auf die reelle Achse der Gaußschen Zahlenebene ergibt $\mathcal{R}e\{\hat{U}e^{j\omega t}\} = \mathcal{R}e\{\hat{u}e^{j(\omega t+\varphi)}\} = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, also die zugrundeliegende pysikalische Spannung.



3.2.3 Der komplexe Widerstand

3.2.3.1 Die Definition und die Grundelemente

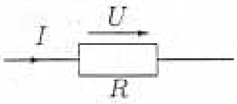
Ist U die an einem Zweipolelement anliegende (komplexe) Spannung und I der (komplexe) Strom durch diesen Zweipol, dann nennt man die Quotienten

$$Z = \frac{U}{I},\ Y = \frac{I}{U} = \frac{1}{Z}$$

den komplexen Widerstand bzw. den komplexen Leitwert dieses Zweipolelementes. Für den komplexen Widerstand ist auch die Bezeichnung *Impedanz* und für den komplexen Leitwert die Bezeichnung *Admittanz* üblich.

1. Die Impedanz eines Ohmschen Widerstandes

Bei einem Ohmschen Widerstand gilt der Zusammenhang $u(t) = R \cdot i(t)$. Wenn $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$ ist, wird $u(t) = R\hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$. Dann ist

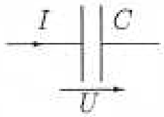


$$I = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i}e^{j\varphi_i},\ U = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i}Re^{j\varphi_i} \text{ und } Z = \frac{U}{I} = R.$$

Bei einem Ohmschen Widerstand stimmt also der "wirkliche Widerstand" mit dem komplexen Widerstand überein.

2. Die Impedanz eines Kondensators

Bei einem Kondensator gilt der Zusammenhang



$$i(t) = C\frac{d\,u(t)}{d\,t}.$$

Wenn $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$ ist, wird

$$i(t) = -\hat{u}\omega C\sin(\omega t + \varphi_u) = \hat{u}\omega C\cos(\omega t + \varphi_u + \pi/2) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

mit $\hat{i} = \hat{u}\omega C$ und $\varphi_i = \varphi_u + \pi/2$. Dann wird

$$U = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}e^{j\varphi_u},\ I = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i}e^{j\varphi_i} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}\,\omega Ce^{j(\varphi_u+\pi/2)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}\,\omega Ce^{j\varphi_u}e^{j\pi/2}.$$

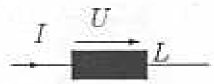
Mit $e^{j\pi/2} = \cos(\pi/2) + j\sin(\pi/2) = j$ folgt $I = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}j\omega Ce^{j\varphi_u}$ und dann

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{1}{j\omega C},\ Y = \frac{1}{Z} = j\omega C.$$

Hinweis: Aus den oben angegebenen und abgeleiteten Beziehungen $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u)$ und $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_u + \pi/2)$ erkennt man, daß der Strom und die Spannung an einem Kondensator um den Phasenwinkel $\pi/2$, (1/4 Periodendauer) gegeneinander verschoben sind. Man sagt, daß der Strom der Spannung um 90° "vorauseilt".

3. Die Impedanz einer Spule

Bei der Spule besteht der Zusammenhang



$$u(t) = L\frac{d\,i(t)}{d\,t}.$$

Mit $i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$ enthält man entsprechend den Rechenschritten bei dem Kondensator $u(t) = \hat{i}\omega L\cos(\omega t + \varphi_i + \pi/2)$ und dann $I = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i}e^{j\varphi_i}$, $U = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i}j\omega Le^{j\varphi_i}$,

$$Z = \frac{U}{I} = j\omega L,\ Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{j\omega L}.$$

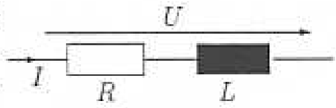
Auch bei einer Induktivität besteht zwischen dem Strom und der Spannung eine Phasendifferenz von$\pi/2$. Man sagt, daß der Strom der Spannung um 90° "nacheilt".

3.3 Schaltungen in der Wechselstromtechnik

3.3.1 Einfache Zusammenschaltungen komplexer Widerstände

Weil die komplexen Ströme und Spannungen die Kirchhoffschen Gesetze erfüllen, gelten die "Zusammenschaltungsregeln" für Widerstände aus der Gleichstromtechnik in gleicher Weise für komplexe Widerstände.

1. Verlustbehaftete Spule

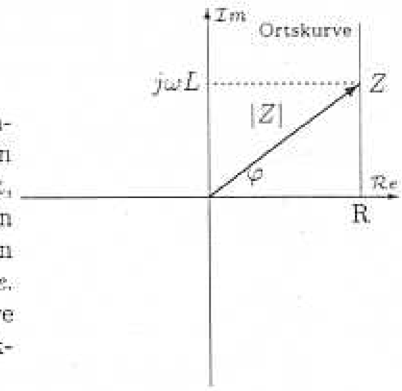


Wie im Abschnitt 3.1.3 erklärt wurde, kann eine reale Spule in erster Näherung durch die rechts stehende Schaltung beschrieben werden. Der "Verlustwiderstand" R ist bei guten Spulen sehr klein. Wegen der Reihenschaltung können die Impedanzen addiert werden:

$$Z = R + j\omega L.$$

Zur graphischen Darstellung der komplexen Funktion Z könnte man beispielsweise den Betrag und Phasenwinkel auftragen:

$$Z = |Z|e^{j\varphi}, \; |Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \; \varphi = \arctan(\omega L/R).$$



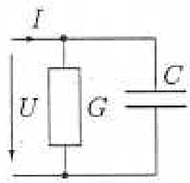
Rechts ist eine weitere Darstellungsart für die Impedanz Z angegeben. Die komplexe Größe $Z = R + j\omega L$ wird als Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt. Wenn man ω erhöht, dann bewegt sich die Spitze des Zeigers entlang der senkrechten Linie nach oben. Diese Linie, auf der sich die Zeigerspitze in Abhängigkeit von der Frequenz bewegt, nennt man *Ortskurve*. Weil im vorliegenden Fall der Imaginärteil von Z nur positive Werte annehmen kann, spricht man hier auch von einem induktiven Verhalten.

Hinweis: Die Qualität einer Spule wird durch ihre sogenannte Güte

$$Q = \frac{\omega L}{R}$$

beschrieben. Die Spule ist bei einer gegebenen Frequenz umso besser, je größer das Verhältnis von ωL zu dem Verlustwiderstand R ist. In der Praxis sind Spulengüten bis zu Werten von ca. 500 erreichbar.

2. Der verlustbehaftete Kondensator



Aus der rechts skizzierten Ersatzschaltung für einen verlustbehafteten Kondensator (siehe Abschnitt 3.1.2) erhält man den komplexen Leitwert, die Admittanz

$$Y = G + j\omega C.$$

Diese Beziehung entspricht formal vollkommen der Beziehung für die Impedanz bei der verlustbehafteten Spule. Nach einigen Umrechnungsschritten und mit $R = 1/G$ erhält man die Impedanz der Schaltung zu

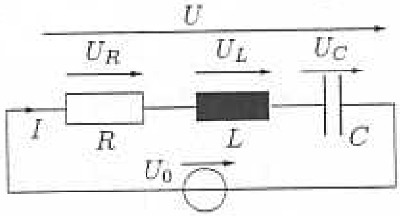
$$Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1 - j\omega RC}{1 - j\omega RC} = \frac{R - j\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2},$$

$$Z = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} - j\frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}.$$

Im Gegensatz zur verlustbehafteten Spule ist der Imaginärteil von Z stets negativ, man spricht dann von einem kapazitiven Verhalten.

Genau so wie bei Spulen, kann auch bei Kapazitäten eine Güte $Q = \omega C/G$ definiert werden. Das Gütemaß ist bei Kondensatoren aber nicht so wichtig wie bei Spulen, weil Kondensatoren oft sehr große Gütewerte aufweisen und die Rechnung daher mit idealen Kondensatoren erfolgen kann.

3. Der Reihenschwingkreis

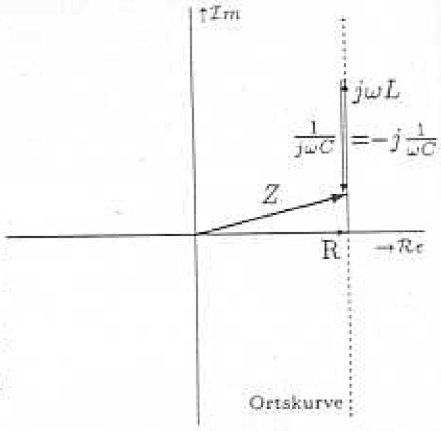


Die Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstandes, einer Spule und eines Kondensators wird als *Reihenschwingkreis* bezeichnet. Der Widerstand R kann als Verlustwiderstand der Spule aufgefaßt werden.

Bei einer verlustfreien Spule ist $R = 0$, dann liegt ein verlustfreier Reihenschwingkreis vor. In dem Bild oben rechts ist der Reihenschwingkreis an eine Spannungsquelle angeschlossen.

Zuerst berechnen wir die Impedanz des Reihenschwingkreises und erhalten

$$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX.$$



Das Bild zeigt Z als Vektor in der Gaußschen Zahlenebene. Z ist die Summe der drei Vektoren R, $j\omega L$ und $\frac{1}{j\omega C}$. Offenkundig bewegt sich die Zeigerspitze des Summenvektors Z längs der gestrichelten Linie (*Ortskurve*). Bei großen ω-Werten überwiegt der induktive Anteil: $X = \omega L - \frac{1}{\omega C} > 0$. Die Schaltung verhält sich dann induktiv. Bei kleinen ω-Werten ist $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, dann ist $X < 0$, man spricht von einem kapazitven Verhalten.

Aus dem Bild erkennt man unmittelbar, daß der Betrag $|Z|$ der Impedanz genau dann minimal wird, wenn

$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0$$

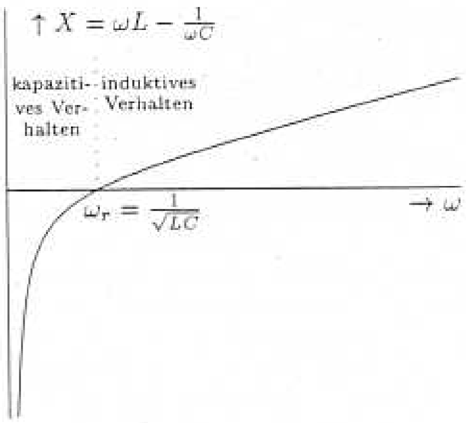
wird. Dieser Fall tritt bei der Frequenz $\omega = \sqrt{1/(LC)}$ auf . Man bezeichnet sie als die *Resonanzfrequenz* (genauer: Resonanzkreisfrequenz) des Schwingkreises

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Bei ω_r wird $Z = R$ und bei einem verlustfreien Reihenschwingkreis ($R = 0$) wird $Z = 0$.

Ein *verlustloser Reihenresonanzkreis hat bei seiner Resonanzfrequenz* $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ *den Widerstand* $Z = 0$.

Das Bild zeigt den prinzipiellen Verlauf von $X = \omega L - \frac{1}{\omega C}$. Bei niedrigen Frequenzen ($\omega < \omega_r$) verhält sich die Schaltung kapazitiv und bei größeren Frequenzen ($\omega > \omega_r$) induktiv. Bei ganz niedrigen Frequenzen gilt sogar $X \approx -\frac{1}{\omega C}$, die Schaltung kann durch die Kapazität ersetzt werden. Bei sehr großen Frequenzen wird $X \approx \omega L$, die Schaltung kann durch die Induktivität ersetzt werden.



Wir untersuchen nun das Verhalten des an die Spannungsquelle angeschlossenenen Reihenschwingkreises. Dann fließt der Strom

$$I = \frac{U_0}{Z} = \frac{U_0}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}.$$

Uns interessiert zunächst die Spannung U_C an der Kapazität

$$U_C = I \cdot \frac{1}{j\omega C} = \frac{U_0}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} = \frac{U_0}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir den Betrag

$$\left|\frac{U_C}{U_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Im verlustfreien Fall ($R = 0$) ergibt sich

$$\left|\frac{U_C}{U_0}\right|_{\omega=\omega_r} = \frac{1}{|1 - \omega^2 LC|}.$$

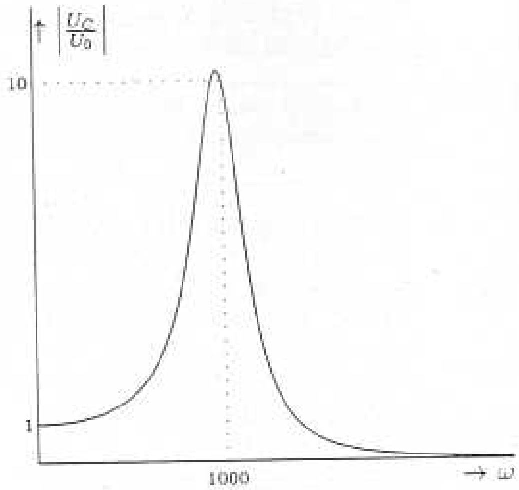
Dies bedeutet, daß beim verlustfreien Reihenschwingkreis bei der Resonanzfrequenz $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ an der Kapazität eine unendlich große Spannung auftritt.

Im Fall $R \neq 0$ erhält man bei ω_r

$$\left|\frac{U_C}{U_0}\right|_{\omega=\omega_r} = \frac{1}{\omega_r RC} = \frac{\omega_r}{\omega_r^2 RC} = \frac{\omega_r}{\frac{1}{LC} RC} = \frac{\omega_r L}{R} = Q.$$

Q wurde oben als *Güte* der Spule eingeführt. Die "Qualität" einer Spule ist umso besser, je größer die Impedanz $\omega_r L$ (hier $\omega = \omega_r$) im Vergleich zu dem Verlustwiderstand R ist. Man kann zeigen, daß bei Spulengüten von $Q > 4 \ldots 5$ die Funktion $|U_C/U_0|$ in der Nähe von ω_r ihr Maximum aufweist, und daß dann am Kondensator eine (maximale) Spannung $|U_C| \approx Q \cdot |U_0|$ auftritt.

Als Beipiel untersuchen wir einen Reihenschwingkreis mit den Bauelementewerten $R = 1\,\Omega$, $L = 10$ mH und $C = 100\,\mu$F. Dieser Reihenschwingkreis hat eine Resonanzkreisfrequenz von $\omega_r = 1000\,s^{-1}$. Die Spulengüte hat bei der Resonanzfrequenz den Wert $Q = \omega_r L/R = 10$. Dies bedeutet, daß bei der Resonanzfrequenz an der Kapazität eine Spannung von ca. $10 \cdot |U_0|$ auftritt. Das nebenstehende Bild zeigt den Verlauf von $|U_C/U_0|$. Man erkennt, daß das Maximum in der unmittelbaren Nähe von $\omega_r = 1000\,s^{-1}$ liegt und der Maximalwert etwa 10 ist.



Wie oben schon erwähnt wurde, sind Spulen mit Güten von bis zu 500 realisierbar. Das bedeutet, daß bei einer Spannungsquelle mit $|U_0| = U_{0_{eff}} = 1$V, Spannungen am Kondensator von bis zu 500 V (Effektivwert) möglich sind. Man spricht in diesem Fall von einer *Resonanzüberhöhung*. In der Praxis ist dieser Effekt auch deshalb von Bedeutung, weil auch in Schaltungen mit niedrigen Betriebsspannungen unter Umständen Kondensatoren mit sehr hohen "Durchschlagsspannungen" eingebaut werden müssen.

Wir wollen nun noch die Spannungen an dem Widerstand und der Induktivität angeben. Mit $U_R = I \cdot R$ und $I = U_0/Z$ erhält man

$$\frac{U_R}{U_0} = \frac{R}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}, \quad \left|\frac{U_R}{U_0}\right| = \frac{\omega RC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Bei ausreichend großen Spulengüten ($Q > 4 \ldots 5$) tritt auch hier bei der Resonanzfrequenz $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ ein Maximum

$$\left|\frac{U_R}{U_0}\right|_{\omega=\omega_r} = 1$$

auf.

Bei der Induktivität erhält man

$$\frac{U_L}{U_0} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}, \quad \left|\frac{U_L}{U_0}\right| = \frac{\omega^2 LC}{\sqrt{(1-\omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Bei der Resonanzfrequenz wird

$$\left|\frac{U_L}{U_0}\right|_{\omega=\omega_r} = \frac{\omega_r L}{R} = Q.$$

Bei der Spule tritt bei der Resonanzfrequenz die gleiche Spannungsüberhöhung wie am dem Kondensator auf.

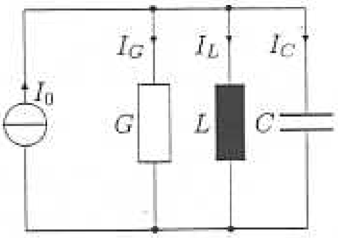
Zum Abschluß dieses Beispieles noch eine "Rückbesinnung" auf den physikalischen Hintergrund. Es sei $u_0(t) = \hat{u}_0 \cos(\omega t)$ die Spannung an einem Reihenschwingkreis mit der Güte $Q = 10$. Gesucht sind die Spannungen $u_R(t)$, $u_L(t)$ und $u_C(t)$ an Widerstand, Spule und Kondensator bei der Resonanzfrequenz des Reihenschwingkreises.

Aus $u_0(t) = \hat{u}_o \cos(\omega t)$ folgt $U_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{u}_0$. Bei der Resonanzfrequenz wird $U_R = U_0$ und damit $u_R(t) = \hat{u}_0 \cos(\omega t)$. Dies ist ein sehr einleuchtendes Ergebnis. Bei der Resonanzfrequenz hat die Reihenschaltung die Impedanz $Z = R$, die gesamte Spannung muß an R abfallen, also $u_R(t) = u_0(t)$.

Für die Induktivität gilt bei der Resonanzfrequenz $U_L = jQU_0 = QU_0 e^{j\pi/2}$. Daraus folgt $u_L(t) = Q\hat{u}_0 \cos(\omega t + \pi/2)$. Die Spannung hat die Q-fache Amplitude wie die der Spannungsquelle und ist gegenüber dieser um $\pi/2$ verschoben.

Bei der Kapazität erhält man aus den obigen Beziehungen $U_C = U_0 Q/j = QU_0 e^{-j\pi/2}$. Damit wird $u_C(t) = Q\hat{u}_0 \cos(\omega t - \pi/2)$. Auch hier tritt eine um $\pi/2$ verschobene Spannung mit der Q-fachen Amplitude auf.

4. Parallelschwingkreis



Eine Parallelschaltung eines Widerstandes, einer Spule und eines Kondensators nennt man *Parallelschwingkreis*. Rechts ist ein socher Parallelschwingkreis skizziert, der durch eine Stromquelle gespeist wird.
Der Gesamtleitwert der Parallelschaltung ergibt sich zu

$$Y = G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right).$$

Diese Beziehung entspricht derjenigen für die Impedanz des Reihenschwingkreises, wenn dort die Widerstände durch Leitwerte ersetzt werden: $R \to G$, $j\omega L \to j\omega C$, $\frac{1}{j\omega C} \to \frac{1}{j\omega L}$.

Der Betrag $|Y|$ des Gesamtleitwertes wird bei der Resonanzfrequenz $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ minimal, $|Y|_{min} = G$. Im Fall $G = 0$ wird $Y = 0$.

Ein verlustloser Parallelschwingkreis hat bei seiner Resonanzfrequenz $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ den Leitwert 0 oder einen unendlich großen Widerstand.

Alle für den Reihenschwingkreis abgeleiteten Ergebnisse können für den an eine Stromquelle angeschlossenenen Parallelschwingkreis übernommen werden, wenn an die Stelle der Impedanzen die Admittanzen und an die Stelle von Spannungen Ströme treten. So erhält man beispielsweise für den Strom durch den Kondensator (Stromteilungssatz)

$$I_C = I_0 \frac{j\omega C}{G + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}}.$$

Formal entspricht dieser Ausdruck der Spannung an der Spule des Reihenschwingkreises.

3.3.2 Einfache Filterschaltungen

3.3.2.1 Übertragungsfunktion und Dämpfung

Wir gehen von der rechts skizzierten Anordnung aus. Eine Schaltung ist an eine Spannungsquelle mit der Spannung U_0 angeschlossen. Von Interesse ist der Verlauf der Ausgangsspannung U_2 in Abhängigkeit von der Frequenz.

Zur Beschreibung dieses Zusammenhanges wird die *Übertragungsfunktion*

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_0}$$

definiert. Bei Kenntnis von $G(j\omega)$ erhält man die gesuchte Ausgangsspannung

$$U_2 = G(j\omega) \cdot U_0.$$

Das Argument $j\omega$ bei G soll auf die in der Regel vorhandene und oft auch erwünschte Abhängigkeit der Übertragungsfunktion von der Frequenz hinweisen.

Die i.a. komplexe Übertragungsfunktion kann auch in der Form

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \cdot e^{j\varphi(\omega)}$$

mit dem Betrag $|G(j\omega)|$ und dem Phasenwinkel $\varphi(\omega)$ dargestellt werden.

In der Informationstechnik verwendet man statt der Betragsfunktion oft ein logarithmisches Maß

$$A(\omega) = -20 \cdot \lg |G(j\omega)|.$$

$A(\omega)$ wird als *Dämpfung* bezeichnet und hat die (Pseudo-) Einheit *Dezibel* (dB).

$G(j\omega) = 1$ entspricht der Dämpfung $A = 0$. Wenn $|G(j\omega)| < 1$ ist, wird $A > 0$ und bei $|G(j\omega)| > 1$ erhält man eine negative Dämpfung. Von einiger Wichtigkeit ist der Wert $|G(j\omega)| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. Dann wird $A(\omega) = -20 \cdot \lg(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 10 \cdot \lg 2 = 3,01 \approx 3$ dB. In der unten stehenden Tabelle sind die Dämpfungswerte für einige Werte von $|G(j\omega)|$ zusammengestellt.

Bei einer gegebenen Dämpfung in dB erhält man durch Umstellung der vorne angegebenen Gleichung den Betrag der Übertragungsfunktion [2]

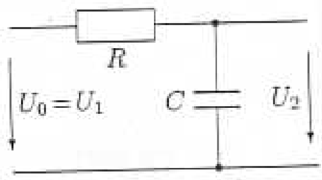
$$|G(j\omega)| = 10^{-A(\omega)/20}.$$

Zusammenstellung einiger Dämpfungswerte

$\|G(j\omega)\|$:	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	2	10	100	1000
$A(\omega)$ [dB]:	60	40	20	6	3	0	−6	−20	−40	−60

3.3.2.2 Der Tiefpaß

Rechts ist die einfachste Realisierungsschaltung für einen Tiefpaß dargestellt. Die Übertragungsfunktion kann unmittelbar mit der Spannungsteilerregel berechnet werden



$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}.$$

Darin ist $\tau = RC$ die im Abschnitt 3.1.2 eingeführte Zeitkonstante. Aus dieser Beziehung erhält man den Betrag und Phasenwinkel

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctan(\omega\tau).$$

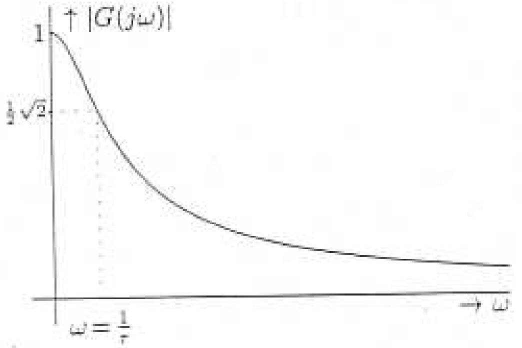
[2] Bei dieser Gleichung handelt es sich um eine Zahlenwertgleichung. Die Dämpfung muß hier in Dezibel eingesetzt werden.

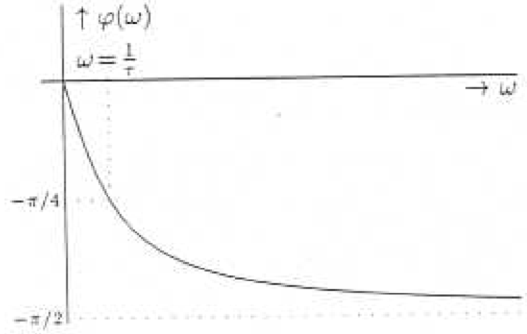
Hinweis zur Berechnung des Betrages und des Phasenwinkels:
Übertragungsfunktionen von Netzwerken sind gebrochen rationale Funktionen in $j\omega$ und haben damit stets die Form $G(j\omega) = P_1(j\omega)/P_2(j\omega)$. P_1 und P_2 sind dabei Polynome in $j\omega$. Im vorliegenden Fall lautet das Zählerpolynom $P_1(j\omega) = 1$ und das Nennerpolynom $P_2(j\omega) = 1 + j\omega\tau$. Mit $P_1(j\omega) = |P_1| \cdot e^{j\alpha}$, $P_2(j\omega) = |P_2| \cdot e^{j\beta}$ erhält man dann

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\varphi} = \frac{|P_1| \cdot e^{j\alpha}}{|P_2| \cdot e^{j\beta}} = \frac{|P_1|}{|P_2|}e^{j(\alpha-\beta)},\ |G(j\omega)| = \frac{P_1}{P_2},\ \varphi = \alpha - \beta.$$

Im vorliegenden Fall ist $|P_1| = 1$, $|P_2| = \sqrt{1 + \omega^2\tau^2}$, $\alpha = 0$ und $\beta = \arctan(\omega\tau)$.

Der Betrag und der Phasenwinkel der Übertragungsfunktion sind unten aufgetragen.





Bei der Kreisfrequenz $\omega = 1/\tau$ wird offenbar

$$|G(j/\tau)| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\ A(1/\tau) = -20 \cdot \lg(\frac{1}{2}\sqrt{2}) = 3 \text{ dB}.$$

Die Kreisfrequenz, bei der die Dämpfung den Wert von 3 dB erreicht, bzw. bei der der Betrag der Übertragungsfunktion auf $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ abgeklungen ist, wird oft als *Grenzfrequenz* ω_g des Tiefpasses bezeichnet. Der Bereich bis zu der Grenzfrequenz ist der *Durchlaßbereich*, der Bereich oberhalb ω_g der *Sperrbereich* des Tiefpasses. Bei kleinen Frequenzen ist $|G(j\omega)| \approx 1$, niedrigfrequente Signale werden kaum gedämpft. Umgekehrt werden Signale mit großen Frequenzen stark gedämpft.

Die Phase hat bei $\omega = 0$ den Wert 0, bei der Grenzkreisfrequenz den Wert $\varphi(1/\tau) = -\pi/4$ und für $\omega \to \infty$ wird $\varphi = -\pi/2$.

Mit der Grenzfrequenz $\omega_g = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$ kann der Betrag und der Phasenwinkel auch in folgender Form dargestellt werden:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_g)^2}},\ \varphi(\omega) = -arctan(\omega/\omega_g).$$

Zusätzliche Bemerkungen:
Bei dem beschriebenen Tiefpaß handelt es sich um die einfachste mögliche Realisierungsschaltung. In der Praxis verwendet man wesentlich aufwendigere Schaltungen (siehe hierzu auch Abschnitt 3.6.3.3). Als *idealen Tiefpaß* bezeichnet man ein Sytem mit einem Betrag der Übertragungsfunktion

$$|G(j\omega)| = \begin{cases} 1 \text{ für } \omega < \omega_g \\ 0 \text{ für } \omega > \omega_g \end{cases}.$$

Der Phasenwinkel eines idealen Tiefpasses nimmt im Durchlaßbereich linear mit der Frequenz ab. In der Lehrveranstaltung *Informations- und Systemtheorie* wird der ideale Tiefpaß ausführlich besprochen.

Beispiel 1

Gegeben sei ein RC-Tiefpaß mit einer Grenzfrequenz $f_g = 1000$ Hz. Gesucht sind die Beträge der Übertragungsfunktion, die Dämpfungen und die Phasenwinkel bei den Frequenzen 0 Hz, 500 Hz, 1000 Hz, 5000 Hz und 10000 Hz. Außerdem ist das Ausgangssignal $u_2(t)$ bei dem Eingangssignal $u_0(t) = \hat{u}_0 \cos(\omega t)$ bei $f = 1000$ Hz zu ermitteln.

Aus den oben abgeleiteten Beziehungen findet man mit $\omega/\omega_g = f/f_g$

$$|G(j2\pi f)| = \frac{1}{\sqrt{1+(f/f_g)^2}}, \quad A = 10 \cdot \lg\left[1+(f/f_g)^2\right], \quad \varphi = -\arctan(f/f_g).$$

Mit diesen Beziehungen erhalten wir die folgenden Ergebnisse:

f [Hz]:	0	500	1000	5000	10000
$\|G\|$:	1	0,894	0,707	0,196	0,0995
A [dB] :	0	0,969	3	14,15	20
φ :	0	-26,6 °	-45 °	-78,7 °	-84,3 °

Bei $u_0(t) = \hat{u}_0 \cos(\omega t)$ wird $U_0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\hat{u}_0$, $U_2 = G(j\omega) \cdot U_0$. Aus der Tabelle entnimmt man für $f = 1000$ Hz die Werte $|G(j\omega)| = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $\varphi = -45^0 = -\pi/4$, damit wird

$$U_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}_0 |G(j\omega)| e^{j\varphi} = \frac{1}{2}\hat{u}_0 e^{-j\pi/4}.$$

Damit folgt schließlich

$$u_2(t) = \sqrt{2} \cdot |U_2| \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}_0 \cos(\omega t - \pi/4), \quad \omega = 2\pi \cdot 1000\ s^{-1}.$$

Beispiel 2

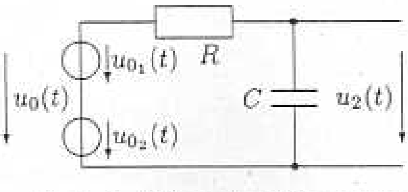
Das Eingangssignal eines RC-Tiefpasses mit der Grenzfrequenz $f_g = 1000$ Hz (wie beim Beispiel 1) sei

$$u_0(t) = \hat{u}_{0_1} \cos(\omega_1 t) + \hat{u}_{0_2} \cos(\omega_2 t) \text{ mit } f_1 = 500 \text{ Hz}, \ f_2 = 5000 \text{ Hz}.$$

Das Ausgangssignal des Tiefpasses soll berechnet werden.

Die besprochenen Berechnungsverfahren sind nur für sinusförmige Vorgänge anwendbar, nicht jedoch für die Summe sinusförmiger Teilsignale mit unterschiedlichen Frequenzen.

Trotzdem können wir das vorliegende Problem mit unseren Kenntnissen lösen. Dazu betrachten wir die rechts skizzierte Schaltung. Die Spannung $u_0(t)$ entsteht durch die Reihenschaltung zweier Spannungsquellen mit den Teilspannungen $u_{0_1}(t) = \hat{u}_{0_1} \cos(\omega_1 t)$ und $u_{0_2}(t) = \hat{u}_{0_2} \cos(\omega_2 t)$.



Die weitere Berechnung erfolgt mit dem *Überlagerungssatz*. Zunächst wird die untere Spannungsquelle kurzgeschlossen ($u_{0_2}(t) = 0$). Dann liegt ein lösbares Problem vor:

$$U_{2_1} = G(j\omega_1) \cdot U_{0_1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}_{0_1} \cdot 0,894 \cdot e^{-j0,4636} \text{ (siehe Tabelle bei Beispiel 1)},$$

$$u_{2_1}(t) = \hat{u}_{0_1} \cdot 0,894 \cdot \cos(\omega_1 t - 0,4636).$$

Bei Kurzschluß der oberen Quelle ($u_{0_1}(t) = 0$) erhält man entsprechend

$$U_{2_2} = G(j\omega_2) \cdot U_{0_2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}_{0_2} \cdot 0,196 \cdot e^{-j1,37} \text{ (siehe Tabelle bei Beispiel 1)},$$

$$u_{2_2}(t) = \hat{u}_{0_2} \cdot 0,196 \cdot \cos(\omega_2 t - 1,37).$$

Gesamtergebnis:

$$u_2(t) = u_{2_1}(t) + u_{2_2}(t) = \hat{u}_{0_1} \cdot 0,894 \cdot \cos(\omega_1 t - 0,4636) + \hat{u}_{0_2} \cdot 0,196 \cdot \cos(\omega_2 t - 1,37).$$

Bemerkungen:

1. Bekanntlich können beliebige periodische Funktionen in Form von *Fourier-Reihen* dargestellt werden. Wenn $u_0(t)$ eine periodisch verlaufende Spannung ist, gilt

$$u_0(t) = c_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cdot \cos(\nu\omega_0 t - \varphi_\nu).$$

Darin ist $\omega_0 = 2\pi/T$ die Grundkreisfrequenz der mit der Periodendauer T periodischen Spannung $u_0(t)$. Daraus folgt, daß $u_0(t)$ als Summe sinusförmiger Signale dargestellt werden kann. Für jede der Teilschwingungen kann die Reaktion des Netzwerkes mit der komplexen Rechnung ermittelt werden. Die Überlagerung der so ermittelten Teilergebnisse ergibt die gesuchte Netzwerkreaktion auf das periodische Eingangssignal $u_0(t)$.

2. Im vorliegenden Fall bestand das Einganssignal für den Tiefpaß aus der Summe von zwei sinusförmigen Signalen mit den Amplituden $\hat{u}_{0_1}$ und $\hat{u}_{0_2}$. Oft ist die Spannung $u_{0_1}(t)$ die erwünschte Spannung (das "Nutzsignal") und die höherfrequente Spannung $u_{0_2}(t)$ eine nicht erwünschte Störspannung. Zur qualitativen Beurteilung der Störung führt man *Klirrfaktoren*

$$k_1 = \frac{\hat{u}_{0_2}}{\hat{u}_{0_1}} = \frac{|U_{0_2}|}{|U_{0_1}|}$$

am Eingang des Tiefpasses und

$$k_2 = \frac{\hat{u}_{2_2}}{\hat{u}_{2_1}} = \frac{|U_{2_2}|}{|U_{2_1}|}$$

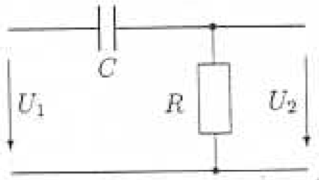
am Tiefpaßausgang ein. Im vorliegenden Fall wird

$$k_2 = \frac{0,196}{0,894} \cdot k_1 = 0,219 \cdot k_1.$$

Der Klirrfaktor am Ausgang des Tiefpasses ist wesentlich kleiner als der am Eingang. Durch den Tiefpaß können Störungen reduziert oder sogar vollständig unterdrückt werden.

3.3.2.3 Der Hochpaß

Rechts ist die einfachste Realisierungsschaltung für einen Hochpaß skizziert. Die Übertragungsfunktion lautet

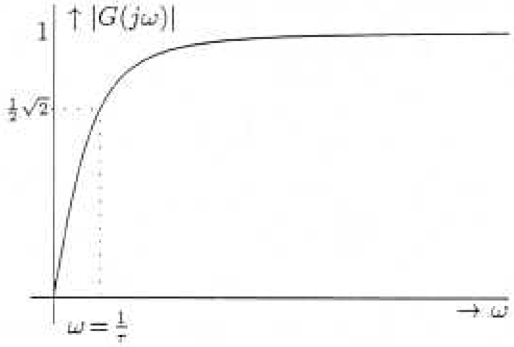


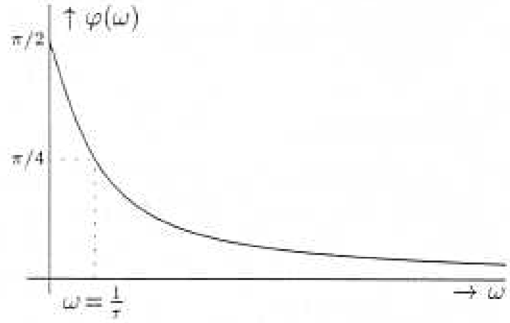
$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}.$$

Für den Betrag und den Phasenwinkel erhält man

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+\omega^2R^2C^2}}, \quad \varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC).$$

Zur Ermittlung der Formel für den Phasenwinkel wird auf die Bemerkungen im Abschnitt 3.3.2.2 über den Tiefpaß verwiesen. Der Verlauf von Betrag und Phasenwinkel sind unten dargestellt.



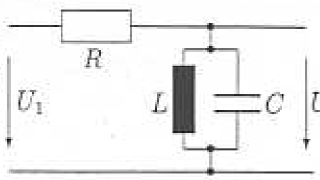


$\omega_g = \frac{1}{RC} = \frac{1}{\tau}$ ist die Grenzkreisfrequenz, bei der (hier) der Betrag der Übertragungsfunktion auf den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ("3 dB Punkt") angestiegen ist.

Der Hochpaß dämpft Signale mit niedrigen Frequenzen, hochfrequente Signale werden hingegen "durchgelassen".

3.3.2.4 Der Bandpaß

Ein Bandpaß hat die Aufgabe Signale in einem bestimmten Frequenzbereich durchzulassen und Signale mit Frequenzen außerhalb des Durchlaßbereiches zu sperren. Die einfachste mögliche Realisierungsschaltung für einen Bandpaß ist rechts skizziert.



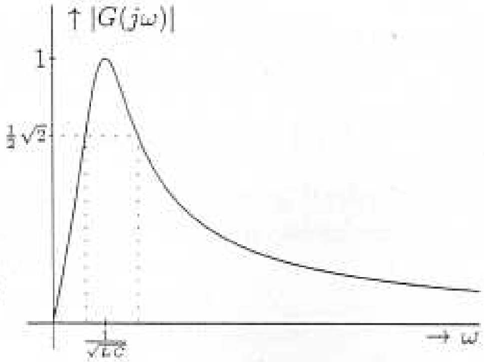
Die Übertragungsfunktion kann auch hier mit der Spannungsteilerregel berechnet werden

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{j\omega L/(j\omega C)}{j\omega L + 1/(j\omega C)}}{R + \frac{j\omega L/(j\omega C)}{j\omega L+1/(j\omega C)}} = \frac{j\omega L/R}{1 + j\omega L/R + (j\omega)^2 LC}.$$

Daraus erhält man den Betrag der Übertragungsfunktion

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega L/R}{\sqrt{(1-\omega^2LC)^2 + \omega^2L^2/R^2}}.$$

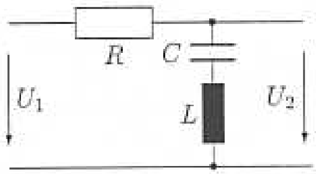
Aus dieser Beziehung und auch aus dem rechts skizzierten Verlauf von $|G(j\omega)|$ erkennt man, daß der Betrag der Übertragungsfunktion bei der Resonanzfrequenz $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ des Parallelschwingkreises im Querzweig der Schaltung den Wert $|G(j\omega)| = 1$ hat.



Dies ist auch physikalisch leicht nachzuvollziehen. Bei seiner Resonanzfrequenz hat der (verlustlose) Parallelschwingkreis einen unendlich großen Widerstand. Damit fließt bei der Frequenz ω_r kein Strom durch den Widerstand R und damit wird $U_2 = U_1$.

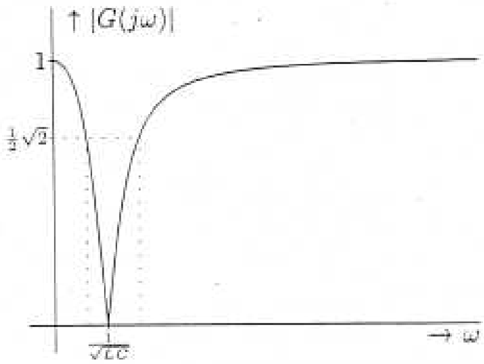
Die Frequenz $\omega = 1/\sqrt{LC}$, bei der $|G| = 1$ ist, ist die *Mittenfrequenz* des Bandpasses. Der Durchlaßbereich ist hier der (im Bild angedeutete) Bereich, in dem der Betrag der Übertragungsfunktion mindestens den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ hat (Dämpfung max. 3 dB). Bandpaßschaltungen in der Praxis sind wesentlich aufwendiger und haben einen viel stärker ausgeprägten Durchlaß- und Sperrbereich. Bei einem idealen Bandpaß ist im Durchlaßbereich $|G(j\omega)| = 1$ und im Sperrbereich $|G(j\omega)| = 0$.

3.3.2.5 Die Bandsperre



Bei der rechts skizzierten Schaltung handelt es sich um eine einfache Bandsperre. Die Übertragungsfunktion lautet

$$G(j\omega) = \frac{j\omega L + \frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1 + (j\omega)^2 LC}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}.$$



Daraus erhält man den rechts skizzierten Betrag der Übertragungsfunktion

$$|G(j\omega)| = \frac{|1 - \omega^2 LC|}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}.$$

Eine Bandsperre unterdrückt Signale in einem schmalen Frequenzbereich und läßt Signale außerhalb des Sperrbereiches weitgehend ungedämpft durch.

Im vorliegenden Fall wird ein Signal mit der Frequenz $1/\sqrt{LC}$ vollständig gesperrt. Physikalisch ist das leicht zu erklären, weil dies die Resonanzfrequenz des Reihenschwingkeises im Querzweig der Schaltung ist. Ein (verlustfreier) Reihenschwingkreis hat bei seiner Resonanzfrequenz $\omega_r = 1/\sqrt{LC}$ den Widerstand 0. Damit wird der Ausgang bei dieser Frequenz kurzgeschlossen.

Bei dem Bild ist der Sperrbereich des Bandpasses markiert. Es ist der Bereich, bei dem der Betrag der Übertragungsfunktion max. den Wert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ hat (Dämpfung mindestens 3 dB).

3.4 Die Leistung

3.4.1 Wirk- Blind- und Scheinleistung

$i(t) = \hat{i}\cos(\omega t + \varphi_i)$ sei ein Strom durch ein Zweipolelement. Die an diesem Zweipolelement abfallende Spannung soll $u(t) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_u) = \hat{u}\cos(\omega t + \varphi_i + \varphi)$ sein. φ ist also die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der Spannung. Der komplexe Strom und die komplexe Spannung lauten

$$I = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i}\,e^{j\varphi_i},\ U = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}\,e^{j(\varphi_i+\varphi)} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}\,e^{j\varphi_i}e^{\varphi}.$$

Wie im Abschnitt 3.2.2 erklärt wurde, sind die Beträge dieser komplexen Größen die Effektivwerte

$$I_{eff} = |I| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{i}, \;\; U_{eff} = |U| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,\hat{u}.$$

Die in dem betrachteten Zweipolelement auftretende *Augenblicksleistung* lautet

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t)\cdot i(t) = \hat{u}\,\hat{i}\,\cos(\omega t + \varphi_i + \varphi)\cos(\omega t + \varphi_i) = \\ &= \tfrac{1}{2}\,\hat{u}\,\hat{i}\cdot\cos(\varphi) + \tfrac{1}{2}\,\hat{u}\,\hat{i}\cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi) = \\ &= U_{eff}I_{eff}\cdot cos(\varphi) + U_{eff}I_{eff}\cdot\cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi). \end{aligned}$$

In den allermeisten Fällen ist nur der zeitliche Mittelwert der Augenblicksleistung von Interesse. Dieser kann wegen der Periodizität durch eine Mittelung über eine Periodendauer $T = 2\pi/\omega$ gewonnen werden

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt.$$

Setzt man für $p(t)$ den oben berechneten Ausdruck ein, dann erhält man nach elementarer Rechnung (Übung für den Leser!)

$$P = U_{eff}I_{eff}\cdot\cos(\varphi).$$

φ ist darin die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung. Den Faktor $\cos(\varphi)$ nennt man auch *Leistungsfaktor*.

Wir führen nun die *komplexe Leistung* [3]

$$\underline{S} = U \cdot I^*$$

ein. Darin ist $U = U_{eff}\,e^{j(\varphi_i+\varphi)}$, $I = I_{eff}\,e^{j\varphi_i}$ und $I^* = I_{eff}\,e^{-j\varphi_i}$ der konjugiert komplexe Strom. Mit diesen Ausdrücken lautet die komplexe Leistung

$$\underline{S} = U_{eff}I_{eff}e^{j\varphi} = U_{eff}I_{eff}\cdot\cos(\varphi) + jU_{eff}I_{eff}\sin(\varphi).$$

Der Realteil der komplexen Leistung ist offenbar die vorne berechnete mittlere Leistung.

Wir führen nun einige neue Bezeichnungen ein. Die mittlere Leistung

$$P = U_{eff}I_{eff}\cdot\cos(\varphi)$$

wird auch als *Wirkleistung* bezeichnet. Der Imaginärteil der komplexen Leistung

$$Q = U_{eff}I_{eff}\cdot\sin(\varphi)$$

wird *Blindleistung* genannt. Schließlich ist

$$S = U_{eff}I_{eff} = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

[3] Wie ganz zu Anfang erwähnt, wird auf Unterstreichungen komplexer Größen in diesem Manuskript verzichtet. Hier wird eine Ausnahme gemacht, weil das Formelzeichen S später für die Scheinleistung verwendet wird.

die *Scheinleistung*[4].

Wir berechnen jetzt die einzelnen "Leistungen" bei unseren drei Zweipolelemeten Widerstand, Kondensator und Spule. Die Ergebnisse sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

	Widerstand R	Kapazität C	Induktivität L
Strom und Spannung	$U = I \cdot R$	$U = I \cdot \frac{1}{j\omega C} =$ $= I\frac{1}{\omega C}e^{-j\pi/2}$	$U = I \cdot j\omega L =$ $= I\omega L e^{j\pi/2}$
Effektivwerte, Phase	$U_{eff} = R \cdot I_{eff}$, $\varphi = 0$	$U_{eff} = \frac{1}{\omega C} \cdot I_{eff}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$	$U_{eff} = \omega L \cdot I_{eff}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$
Wirkleistung	$P = U_{eff}I_{eff} = I_{eff}^2 R$	$P = 0$	$P = 0$
Blindleistung	$Q = 0$	$Q = -U_{eff}I_{eff} =$ $= -I_{eff}^2\frac{1}{\omega C}$	$Q = U_{eff}I_{eff} =$ $= I_{eff}^2 \omega L$
Scheinleistung	$S = P$	$S = Q$	$S = Q$
Augenblicksleistung	$U_{eff}I_{eff}+$ $+U_{eff}I_{eff}\cos(2\omega t+2\varphi_i)$	$U_{eff}I_{eff}\times$ $\times\cos(2\omega t+2\varphi_i-\pi/2)$	$U_{eff}I_{eff}\times$ $\times\cos(2\omega t+2\varphi_i+\pi/2)$

Im Zweipolelement "Widerstand" wird nur Wirkleistung umgesetzt. Bei dem Kondensator und bei der Spule wird keine Wirkleistung verbraucht. Die Augenblicksleistung hat hier den Mittelwert 0. Die Leistung "pendelt" bei diesen Zweipolelementen zwischen dem Kondensator bzw. der Spule und dem Generator. Beim Kondensator wird Leistung zum Aufbau des elektrischen Feldes benötigt. Bei einem Vorzeichenwechsel der Spannung wird die im elektrischen Feld gespeicherte Energie wieder in den Generator zurückgespeist. Bei der Spule wird Energie zum Aufbau des magnetischen Feldes benötigt und wieder an den Generator zurückgeliefert.

Beispiel 1

Ein Zweipol besteht aus einer Reihenschaltung eines Widerstandes von 1000 Ω und einer Induktivität von 0,5 H. Die Schaltung liegt an einer Spannung von 220 V, die Frequenz ist 50 Hz. Zu berechnen sind die Wirk-, Blind- und Scheinleistung.

Mit der Impedanz

$$Z = R + j\omega L = 1000 + j \cdot 2\pi 50 \cdot 0,5 = 1000 + j157,08 = 1012,26\,e^{j0,156}$$

erhalten wir den Strom

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{220}{1012,26\,e^{j0,156}} = 0,2173e^{-j0,156},$$

[4] Wirk-, Blind- und Scheinleistung haben die Einheit [VA]. Die Einheit *Watt* (1 W=1 VA) darf nur für die Wirkleistung verwendet werden.

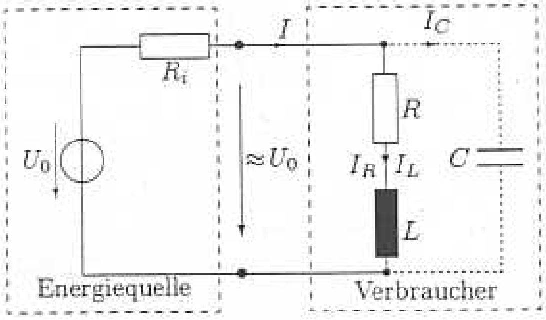
Die komplexe Leistung wird dann

$$\underline{S} = U \cdot I^* = 220 \cdot 0,2173\, e^{j0,156} = 47,814 e^{j0,156} = 47,22 + j7,427 = P + jQ.$$

Damit wird die Wirkleistung $P = 47,22$ W, die Blindleistung $Q = 7,427$ VA und die Scheinleistung $S = 47,81$ VA.
Die Berechnung der Wirkleistung kann auch noch auf andere Art erfolgen. Wirkleistung wird nur in dem Widestand umgesetzt. Dann gilt $P = |I|^2 \cdot R = 0,2173^2 \cdot 1000 = 47,22$ W.

Beispiel 2 (Blindstromkompensation)

Ein induktiver Verbraucher ist an eine Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand R_i angeschlossen. Parallel zu dem Verbraucher wird eine Kapazität geschaltet. Der Wert von C soll so festgelegt werden, daß die Verluste $P_v = |I|^2 R_i$ innerhalb der Energiequelle minimal werden.



Für die Rechnung wird vorausgesetzt, daß der Innenwiderstand R_i der Energiequelle sehr klein gegenüber dem Verbraucherwiderstand ist. Dies entspricht den Verhältnissen in der Energieversorgung. Unter dieser Annahme kann der geringe Spannungsabfall innerhalb der Energiequelle vernachlässigt werden.

Wir erhalten $I = U_0 \cdot Y$ mit dem Eingangsleitwert des Verbrauchers

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right).$$

Offensichtlich wird die Verlustleistung $P_v = |I|^2 R_i$ minimal, wenn $|I| = |U_0| \cdot |Y|$ und damit

$$|Y| = \left|\frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} + j\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2}\right)\right|$$

minimal wird. Da die Werte von R, L und auch der Kreisfrequenz ω festliegen, erhält man ein Minimum dann, wenn der Imaginärteil von Y verschwindet, dies führt zu der Bedingung

$$C = \frac{L}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Bei diesem Wert von C ist die Eingangsimpedanz des Verbrauchers

$$Z = \frac{1}{Y} = R + \frac{\omega^2 L^2}{R}$$

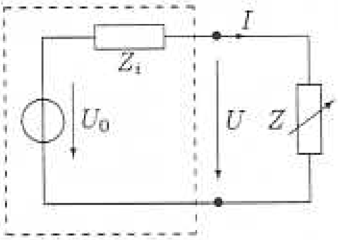
rein reell. Gleichzeitig wird $|I|$ minimal und damit auch die Verlustleistung in der Energiequelle.

Elektrizitätsversorgungsunternehmen verlangen normalerweise eine Blindstromkompensation um damit Leistungsverluste im Generator und Versorgungsnetz niedrig zu halten. So muß z.B. bei Gasentladungslampen, die mit induktiven Vorschaltgeräten betrieben werden, stets ein Kondensator zur Blindstromkompensation parallelgeschaltet werden.

Zahlenwertbeispiel: $R = 1000\,\Omega$, $L = 0,5$ H, $f = 50$ Hz:

$$C = \frac{0,5}{1000^2 + (2\pi 50)^2 0,5^2} = 48,8 \text{ nF}.$$

3.4.2 Leistungsanpassung bei Wechselstrom



Im Gegensatz zu dem für den Gleichstrom besprochenen Fall (Abschnitt 2.2.3) wird nun ein komplexer innerer Widerstand der Energiequelle $Z_i = R_i + jX_i$ und ein komplexer Verbraucherwiderstand $Z = R + jX$ vorausgesetzt. Z soll bei einer gegebenen inneren Impedanz Z_i so gewählt werden, daß in ihm eine maximale Leistung umgesetzt wird.

Für die Leistung in Z erhält man

$$P = \mathcal{R}e\{UI^*\} = \mathcal{R}e\{Z \cdot I \cdot I^*\} = |I|^2 \cdot \mathcal{R}e\, Z = R \cdot |I|^2.$$

Mit

$$I = \frac{U_0}{Z + Z_i} = \frac{U_0}{(R + R_i) + j(X + X_i)}$$

erhält man

$$P = |U_0|^2 \frac{R}{(R + R_i)^2 + (X + X_i)^2}.$$

R und X müssen so gewählt werden, daß P maximal wird. Diesem Ziel kommt man sicher mit $X = -X_i$ näher. Dann erhält man den gleichen Ausdruck

$$P = |U_0|^2 \frac{R}{(R + R_i)^2}$$

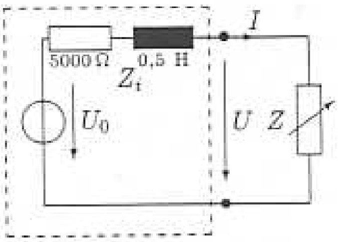
wie im Gleichstromfall (Abschnitt 2.2.3), der mit $R = R_i$ zu einem Maximum der abgegebenen Leistung führt.

Ergebnis:

$$Z = R + jX = R_i - jX_i = Z_i^*.$$

Bei Wechselstrom wird die Leistungsanpassung erreicht, wenn die Verbraucherimpedanz mit der konjugiert komplexen "Innenimpedanz" der Energiequelle übereinstimmt. Es zeigt sich, daß bei Wechselstrom eine Leistungsanpassung i.a. immer nur für eine ganz bestimmte Frequenz , nicht aber für einen ganzen Frequenzbereich, möglich ist.

Beispiel



Man bestimme bei der rechts skizzierten Schaltung die Impedanz Z so, daß eine Leistungsanpassung bei $f = 1000$ Hz. erfolgt. Eine für 1000 Hz gültige Ersatzschaltung für die Impedanz Z soll angegeben werden.

Hier ist $Z_i = 5000 + j \cdot 0,5 \cdot 2\pi \cdot 1000 = 5000 + j3142$.

Dann wird $Z = Z^* = 5000 - j3142$. Diese Impedanz kann durch eine Reihenschaltung eines Widerstandes und eines Kondensators realisiert werden

$$Z = 5000 - j3142 = R - j\frac{1}{\omega C},\ R = 5000\,\Omega,\ C = \frac{1}{3142 \cdot \omega} = \frac{1}{3142 \cdot 2\pi \cdot 1000} = 50,66\,nF.$$

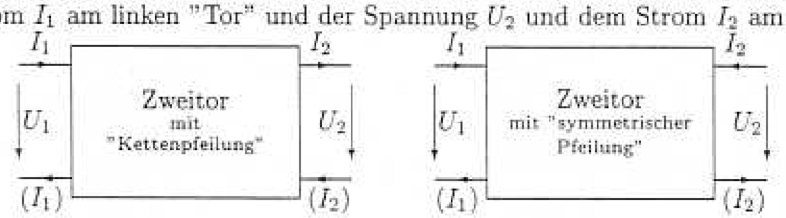
Man beachte, daß diese Schaltung nur bei der Frequenz von 1000 Hz eine Leistungsanpassung realisiert. Bei einer anderen Frequenz müßte der Wert der Kapazität geändert werden.

3.5 Zweitorschaltungen

3.5.1 Das Zweitor

Bisher wurden ausschließlich Elemente mit zwei Klemmen (Zweipole) und deren Zusammenschaltungen betrachtet. Ein ganz wichtiges Bauelement, das kein Zweipol ist, ist der *Transformator* oder *Übertrager*. Ein Übertrager hat (mindestens) 4 Anschlüsse bzw. zwei Klemmenpaare. Der Übertrager wird im Abschnitt 3.6.1 besprochen.

Wir betrachten zunächst das unten links im Bild skizzierte *Zweitor* mit der Spannung U_1 und dem Strom I_1 am linken "Tor" und der Spannung U_2 und dem Strom I_2 am rechten "Tor".



Das Zweitor muß so aufgebaut oder beschaltet sein, daß der am Tor 1 an der oberen Klemme hineinfließende Strom genau so groß wie der an der unteren Klemme herausfließende Strom ist. Das gleiche muß für die Ströme am Tor 2 gelten.

Die rechte Schaltung unterscheidet sich von der linken dadurch, daß die Ströme "symmetrisch" gepfeilt sind. Sowohl I_1 als auch I_2 fließen (an den oberen Klemmen) in das Zweitor hinein. Bei den Stromrichtungen im linken Bild spricht man von der *Kettenpfeilung*, bei der im rechten Bild von einer *symmetrischen Pfeilung*.

Unter einigen Voraussetzungen, die als gegeben angenommen werden, können von den vier an den Toren auftretenden Größen U_1, I_1, U_2, I_2 zwei berechnet werden, wenn die anderen beiden bekannt sind. Damit gibt es insgesamt 6 Berechnungsmöglichkeiten (Auswahl von 2 aus 4 Größen). Von diesen sechs Möglichkeiten werden zwei im folgenden etwas genauer untersucht.

3.5.2 Die Impedanzmatrix

Gegeben sind die beiden Ströme I_1 und I_2, dabei wird von der rechten Anordnung mit der symmetrischen Pfeilung ausgegangen. Dann gelten die Beziehungen

$$U_1 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2,\ U_2 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2,$$

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{I},\ \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix},\ \boldsymbol{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

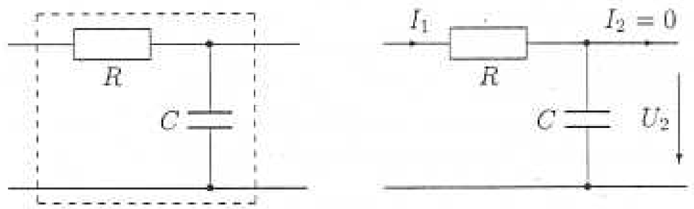
$\boldsymbol{Z}$ nennt man die *Impedanzmatrix* des Zweitores. Die Elemente der Impedanzmatrix können bei einer gegebenen Zweitorschaltung folgendermaße ermittelt werden:

$$Z_{11} = \frac{U_1}{I_1}\bigg|_{I_2=0}, \quad Z_{22} = \frac{U_2}{I_2}\bigg|_{I_1=0}, \quad Z_{12} = \frac{U_1}{I_2}\bigg|_{I_1=0}, \quad Z_{21} = \frac{U_2}{I_1}\bigg|_{I_2=0}.$$

Das Matrixelement Z_{11} kann als Eingangsimpedanz am Tor 1 bei Leerlauf am Tor 2 interpretiert werden. Entsprechend Z_{22} als die in das Tor 2 hineingemessene Impedanz, wenn am Tor 1 $I_1 = 0$ ist.

Es läßt sich zeigen, daß bei Zweitorschaltungen, die ausschließlich aus Widerständen, Spulen, Kondensatoren und auch Übertragern aufgebaut sind, immer $Z_{12} = Z_{21}$ gilt. Man spricht hier von *reziproken* Zweitoren.

Beispiel
Die Impedanzmatrix der im linken Bildteil skizzierten Zweitorschaltung soll berechnet werden.



Bei Lerrlauf am Tor 2 ($I_2 = 0$) wird am Tor 1 die Eingangsimpedanz $Z_{11} = R + \frac{1}{j\omega C}$ gemessen. Bei Leerlauf am Tor 1 mißt man am Tor 2 die Impedanz $Z_{22} = \frac{1}{j\omega C}$. Der Widerstand R ist ohne Einfluß.

Zur Berechnung von Z_{21} betrachten wir die nochmals rechts im Bild skizzierte Schaltung. Offenbar gilt (bei $I_2 = 0$) $U_2 = I_1 \frac{1}{j\omega C}$ und daraus folgt

$$Z_{21} = \frac{U_2}{I_1}\bigg|_{I_2=0} = \frac{1}{j\omega C}.$$

Wie erwähnt, und hier natürlich auch leicht nachgerechnet werden kann, ist $Z_{12} = Z_{21}$. Damit erhalten wir die Impedanzmatrix der oben skizzierten Zweitorschaltung

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix}.$$

3.5.3 Die Kettenmatrix

3.5.3.1 Die Kettengleichungen

Wir gehen nun von der Anordnung links im Bild des Abschnittes 3.5.1 mit der "Kettenpfeilung" aus. Gegeben sind die Ausgangsspannung U_2 und der Ausgangsstrom I_2. Gesucht sind die Spannung und der Strom am Tor 1. Man erhält jetzt die Beziehungen

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2, \quad I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2,$$

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{A}$ ist die *Kettenmatrix* des Zweitores.

Aus der 1. Kettengleichung erhält man den Ausdruck

$$\left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0} = \frac{1}{A_{11}}.$$

Dies bedeutet, daß

$$\frac{1}{A_{11}} = \left.\frac{U_2}{U_1}\right|_{I_2=0} = G(j\omega)$$

die Übertragungsfunktion vom Ein- zum Ausgang des Zweitores ist, wenn dabei die Bedingung $I_2 = 0$ erfüllt ist.

Man kann zeigen, daß bei Zweitoren, die ausschließlich aus Widerständen, Spulen, Kondensatoren und Übertragern aufgebaut sind (reziproke Zweitore), die Determinante der Kettenmatrix immer den Wert 1 hat:

$$\det \boldsymbol{A} = |A| = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} = 1.$$

Die Kettenmatrix läßt sich in die Impedanzamtrix umrechnen und auch umgekehrt

$$\boldsymbol{Z} = \frac{1}{A_{21}}\begin{pmatrix} A_{11} & |A| \\ 1 & A_{22} \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{A} = \frac{1}{Z_{21}}\begin{pmatrix} Z_{11} & |Z| \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix}.$$

Bei den Umrechnungsformeln sind schon die unterschiedlichen Stromrichtungen bei den Matrizen am Tor 2 berücksichtigt.

Beispiel

Man berechne die Kettenmatrix der RC-Schaltung vom Abschnitt 3.5.2. Bei der Rechnung soll von der dort ermittelten Impedanzmatrix ausgegangen werden.

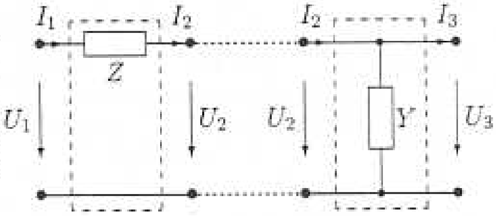
Mit der Impedanzmatrix

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \\ \frac{1}{j\omega C} & \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix}, \; |Z| = Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21} = \frac{R}{j\omega C}$$

erhält man nach der oben angegebenen Gleichung

$$\boldsymbol{A} = j\omega C\begin{pmatrix} R + \frac{1}{j\omega C} & \frac{R}{j\omega C} \\ 1 & \frac{1}{j\omega C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5.3.2 Die Kettenschaltung von Zweitoren



$$\begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun die beiden in dem Bild skizzierten "Elementarzweitore" (zunächst noch getrennt, ohne die gestrichelt skizzierten Verbindungsleitungen). Bei dem linken Zweitor mit der Impedanz Z im Längszweig gilt $U_1 = U_2 + ZI_1$, $I_1 = I_2$ und das bedeutet die Kettenmatrix

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bei dem 2. Zweitor mit dem Querleitwert Y haben die Spannungen und Ströme andere Indizes. Für die Berechnung der Kettenmatrix müssen wir beachten, daß U_2, I_2 dann die Stelle von U_1, I_2 und U_3, I_3 an die Stelle von U_2, I_2 treten. Es gilt dann $U_2 = U_3$, $I_2 = YU_3 + I_3$ und dies bedeutet die Kettenmatrix

$$\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix}.$$

Nun schalten wir die beiden Zweitore hintereinander (gestrichelte Verbindungen im Bild). Für die gesamte Anordnung muß gelten

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_{ges} \cdot \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

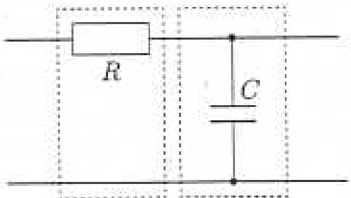
Nun ist aber

$$\begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_2 \cdot \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 \cdot \begin{pmatrix} U_3 \\ I_3 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, daß sich die Kettenmatrix der Hintereinanderschaltung der Zweitore als Produkt der Kettenmatrizen der Teilzweitore ergibt.

Bei der Hintereinanderschaltung (Kettenschaltung) von Zweitoren ergibt sich die Kettenmatrix der Gesamtschaltung als Produkt der Kettenmatrizen der Teilzweitore.

Beispiel
Die Kettenmatrix der rechts skizzierten RC-Schaltung soll als Produkt der Kettenmatrizen der beiden Teilzweitore berechnet werden. Weiterhin ist die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$ zu ermitteln.



Die Schaltung besteht aus der Kettenschaltung zweier Elementarzweitore mit den Kettenmatrizen

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ Y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_1 \cdot \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach den Kettengleichungen gilt $U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2$. Weil bei der Schaltung $I_2 = 0$ ist, wird

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{A_{11}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

3.5.3.3 Die Eingangsimpedanz eines Zweitores, der Wellenwiderstand

Wir wollen nun noch die Eingangsimpedanz Z_1 am Tor 1 eines Zweitores berechnen, wenn das Tor 2 mit einer Impedanz Z_2 abgeschlossen ist.

Offensichtlich ist $Z_1 = U_1/I_1$. Mit den Kettengleichungen erhält man dann unter Beachtung der Bedingung $U_2 = Z_2 \cdot I_2$

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2 = I_2 \cdot (A_{11}Z_2 + A_{12}), \; I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2 = I_2 \cdot (A_{21}Z_2 + A_{22}).$$

Daraus erhält man die Eingangsimpedanz

$$Z_1 = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}}.$$

Beispiel 1

Die Eingangsimpedanz am Tor 1 der mehrfach behandelten RC-Schaltung soll für den Fall $Z_2 = 0$ (Kurzschluß am Tor 2) und für $Z_2 = \infty$ (Leerlauf am Tor 2) berechnet werden.
Aus der Kettenmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

findet man

$$\text{Fall } Z_2 = \infty: \quad Z_1 = \tfrac{A_{11}}{A_{21}} = \tfrac{1+j\omega RC}{j\omega C} = R + \tfrac{1}{j\omega C} = Z_L \text{ Leerlaufeingangsimpedanz},$$

$$\text{Fall } Z_2 = 0: \quad Z_1 = \tfrac{A_{12}}{A_{22}} = R = Z_K \text{ Kurzschlußeingangsimpedanz}.$$

Die Richtigkeit dieser Ergebnisse sind unmittelbar aus der Schaltung erkennbar.

Von Interesse ist die Frage, ob die Abschlußimpedanz Z_2 so gewählt werden kann, daß am Tor 1 die gleiche Impedanz $Z_1 = Z_2$ gemessen wird. Nach unserer Beziehung führt dies auf die Bedingung

$$Z_1 = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}} = Z_2.$$

Wir verzichten hier einmal auf die Auswertung und teilen das folgende Ergebnis mit:

$$Z_2^2 = \frac{A_{12}}{A_{22}} \cdot \frac{A_{11}}{A_{21}} = Z_K \cdot Z_L.$$

Die Eingangskurzschlußimpedanz $Z_K = A_{12}/A_{22}$ und die Eingangsleerlaufimpedanz $Z_L = A_{11}/A_{21}$ wurde beim Beispiel 1 eingeführt. Die so ermittelte Impedanz Z_2 wird der *Wellenwiderstand* Z_W des Zweitores genannt.

Ergebnis:
Wenn ein Zweitor mit seinem *Wellenwiderstand*

$$Z_2 = Z_W = \sqrt{Z_K \cdot Z_L},$$

also dem geometrischen Mittelwert aus dem Eingangskurzschluß- und dem Eingangsleerlaufwiderstand abgeschlossen ist, wird am Tor 1 der gleiche Widerstand gemessen

$$Z_1 = Z_2 = Z_W = \sqrt{Z_K \cdot Z_L}.$$

Beispiel 2
Der Wellenwiderstand der bisher besprochenen RC-Schaltung soll berechnet werden.
Aus der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}$$

findet man

$$Z_W^2 = \frac{A_{12}}{A_{22}}\frac{A_{11}}{A_{21}} = \frac{R}{1} \cdot \frac{1 + j\omega RC}{j\omega C} = \frac{R}{j\omega C} + R^2.$$

Hinweis: Bei Netzwerken, die aus einer endlichen Anzahl konzentrierter Bauelemente (Widerstände, Spulen Kondensatoren, ...) aufgebaut sind, kann der Wellenwiderstand immer nur für eine bestimmte Frequenz realisiert werden, niemals aber für einen Frequenzbereich. Dabei soll der triviale Fall eines nur aus Widerständen bestehenden Netzwerkes ausgeschlossen sein.

Zahlenwertbeispiel: $R = 1000\,\Omega$, $\omega = 1000\,s^{-1}$, $C = 1\,\mu$F:

$$Z_W^2 = \frac{1000}{j \cdot 1000 \cdot 10^{-6}} + 1000^2 = 10^6(1 - j) = \sqrt{2}\,10^6 \cdot e^{-j\pi/4}.$$

Daraus erhält man

$$Z_W = 1189 \cdot e^{-j\pi/8} = 1098 - j455 = \tilde{R} + \frac{1}{j\omega\tilde{C}}, \quad \tilde{R} = 1098\,\Omega, \ \tilde{C} = 2,197\,\mu F.$$

3.5.3.4 Die Übertragungsfunktion eines in Widerstände eingebetteten Zweitores

Häufig kommen Schaltungen in der rechts dargestellten Art vor. Ein Zweitor ist in Widerstände "eingebettet". Der Widerstand R_1 kann dabei die Bedeutung des Innenwiderstandes der Spannungsquelle haben, R_2 hat die Bedeutung des Verbraucherwiderstandes.

Bei der gegebenen Beschaltung erhält man die Beziehungen

$$U_0 = U_1 + R_1 \cdot I_1, \; U_2 = R_2 \cdot I_2.$$

Unter Verwendung der Kettengleichungen

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2, \; I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2$$

erhält man dann

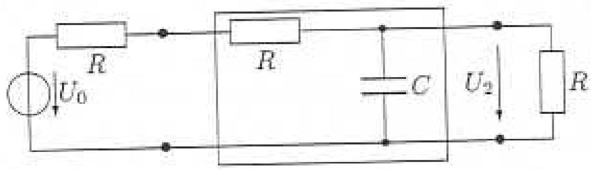
$$U_0 = \left\{A_{11}U_2 + A_{12}\frac{U_2}{R_2}\right\} + R_1 \cdot \left\{A_{21}U_2 + A_{22}\frac{U_2}{R_2}\right\}.$$

Durch elementare Rechnung erhält man hieraus die gesuchte Übertragungsfunktion

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_0} = \frac{1}{A_{11} + A_{12}/R_2 + A_{21}R_1 + A_{22}R_1/R_2}.$$

Beispiel

Die Übertragungsfunktion $G = U_2/U_0$ der rechts skizzierten Schaltung soll berechnet werden.



Die Zweitorschaltung hat die Kettenmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan erhält man nach der oben angegebenen Gleichung

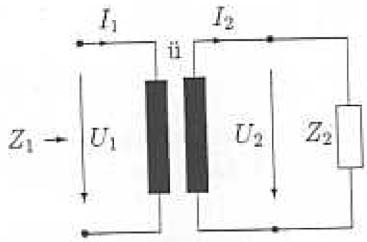
$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_0} = \frac{1}{3 + 2j\omega RC}.$$

3.6 Wichtige Zweitorelemente und Beispiele

3.6.1 Der Übertrager

3.6.1.1 Der ideale Übertrager

Das Bild zeigt das Schaltungssymbol eines idealen *Übertragers* oder *Transformators* mit dem *Übersetzungsverhältnis* ü. In dem Bild ist der Übertrager mit einer Impedanz Z_2 abgeschlossen. Z_1 ist die Eingangsimpedanz am Tor 1.



Bei idealen Übertragern gelten die Beziehungen

$$U_1 = ü \cdot U_2, \; I_1 = \frac{1}{ü}I_2.$$

Ein Vergleich mit den Kettengleichungen

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2, \; I_1 = A_{21}U_2 + A_{22}I_2$$

führt zu der Kettenmatrix des idealen Übertragers

$$A = \begin{pmatrix} \ddot{u} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}} \end{pmatrix}.$$

Das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}$ kann beliebige reelle Werte annehmen, also auch negative Werte. Ein negativer Wert kann z.B. dadurch erreicht werden, daß die Klemmen an der Sekundärseite vertauscht werden (untere Klemme nach oben, obere Klemme nach unten).

Übertrager gehören zu den ganz wichtigen Bauelementen in der Wechselstromtechnik. Mit ihnen können aus einer gegebenen Spannung U_1 nahezu beliebig große Spannungen $U_2 = U_1/\ddot{u}$ erzeugt werden. Bei $|\ddot{u}| > 1$ ist $|U_2| < |U_1|$ und bei $|\ddot{u}| < 1$ ist $|U_2| > |U_1|$. Durch Tranformatoren können außerdem Stromkreise galvanisch entkoppelt werden. Dies bedeutet, daß zwischen diesen keine elektrische Verbindung besteht. Die galvanische Entkopplung ist im Bereich der Energietechnik von großer Bedeutung für die Sicherheit. So besteht zwischen dem Hochspannungs-Versorgungsnetz mit z.B.Spannungen von 15000 V und dem häuslichen Versorgungsnetz mit 220 V keine elektrische Verbindung.

Eine weitere wichtige Eigenschaft des Übertragers findet man, wenn man die Eingangsimpedanz Z_1 eines mit der Impedanz Z_2 abgeschlossenen Übertragers (siehe obiges Bild) berechnet. Mit der im Abschnitt 3.5.3.3 angegebenen Beziehung und der Kettenmatrix des Übertragers erhält man

$$Z_1 = \frac{A_{11}Z_2 + A_{12}}{A_{21}Z_2 + A_{22}} = \ddot{u}^2 \cdot Z_2.$$

Man spricht hier von einer *Impedanztransformation.*

Einige einfache Beispiele

1. Ein Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = 5$ wird durch einen Widerstand von $10\,\Omega$ abgeschlossen. Wie groß ist der am Tor 1 gemessene Widerstand?
Lösung: $Z_1 = \ddot{u}^2 Z_2 = \ddot{u}^2 R = 250\,\Omega$.
Anwendung: Bei der Leistungsanpassung eines Verbrauchers an eine Quelle wird $R = R_i$ gefordert (siehe Abschnitt 3.4.2). Falls diese Forderung nicht erfüllt werden kann, kann durch die Zwischenschaltung eines Übertragers dennoch eine Leistungsanpassung erreicht werden. In diesem Fall wird $Z_2 = R$, $Z_1 = \ddot{u}^2 R = R_i$, also ist das Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = \sqrt{R_i/R}$ zu wählen. Von der Quelle her gesehen, hat dann der Verbraucher den geforderten Widerstandwert R_i.

2. Ein Übertrager mit einem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u}$ ist mit einer Reihenschaltung eines Widerstandes und eines Kondensators abgeschlossen. Gesucht ist die Eingangsimpedanz am Tor 1 des Übertragers und eine Ersatzschaltung für diese Impedanz Z_1.
Lösung:

$$Z_1 = \ddot{u}^2 \cdot Z_2 = \ddot{u}^2 \cdot \left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) = \ddot{u}^2 R + \frac{1}{j\omega C/\ddot{u}^2}.$$

Dies bedeutet eine Reihenschaltung eines Widerstandes $\tilde{R} = \ddot{u}^2 R$ mit einer Kapazität $\tilde{C} = C/\ddot{u}^2$.

3. Zwei Übertrager mit den Übersetzungsverhältnissen $\ddot{u}_1$ und $\ddot{u}_2$ werden hintereinander geschaltet. Gesucht wird die Kettenmatrix dieser Kettenschaltung.
Lösung: Bei der Hintereinanderschaltung werden die Kettenmatrizen der beiden Übertrager mit-

einander multipliziert

$$A = \begin{pmatrix} \ddot{u}_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{u}_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{u}_1\ddot{u}_2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ddot{u}_1\ddot{u}_2} \end{pmatrix}.$$

Ergebnis:
Die Kettenschaltung der beiden Übertrager führt wiederum auf einen Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = \ddot{u}_1 \cdot \ddot{u}_2$.

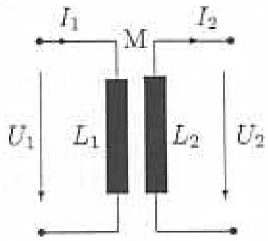
Abschließend noch einige Bemerkungen über *Passivität* und *Aktivität*. Ein Zweipolelement ist dann *passiv*, wenn die mittlere Leistung in ihm nicht negativ ist, d.h. $P = \mathcal{R}e\{U \cdot I^*\} \geq 0$. In diesem Sinne sind Widerstände, Spulen und Kondensatoren passive Zweitorelemente. Ebenfalls passiv sind natürlich auch alle Zweipole, die durch Zusammenschaltungen dieser Elementarzweipole entstehen. Wie ist das nun bei einem Zweitor? Zunächst könnt man vielleicht annehmen, daß ein Übertrager mit einem Übersetzungsverhältnis im Bereich $0 < \ddot{u} < 1$ ein aktives Bauelement ist, weil bei ihm die Ausgangsspannung $|U_2| = |U_1|/\ddot{u}$ größer als die Eingangsspannung ist. Bei z.B. $\ddot{u} = 0,1$ wäre $U_2 = 10 \cdot U_1$. Es muß aber beachtet werden, daß gleichzeitig der Strom den Wert $I_2 = \ddot{u} \cdot I_1$ hat. Bei $\ddot{u} = 0,1$ wäre dies ein Sekundärstrom von $I_2 = 0,1 \cdot I_1$. Man erkennt, daß die Leistung am Ausgang nicht größer als die am Eingang ist. Eine Vergrößerung der Ausgangsspannung führt zu einer entsprechenden Verkleinerung des Ausgangsstromes und umgekehrt. In diesem Sinne ist ein Zweipolelement passiv, wenn gilt:

$$P_1 \geq P_2, \ \mathcal{R}e\{U_1 I_1^*\} \geq \mathcal{R}e\{U_2 I_2^*\}.$$

Das Tor 2 kann keine größere Leistung abgeben, wie in das Tor 1 "hineingeht".

3.6.1.2 Der reale Transformator

Das Bild zeigt das Schaltungssymbol für einen *realen Übertrager*. Genauer gesagt, soll es sich hier um einen verlust- und streuungsfreien Übertrager handeln. Verlustfrei bedeutet, daß die Widerstände der Wicklungen vernachlässigbar klein sind und auch keine Magnetisierungsverluste entstehen. Streungsfreiheit heißt, daß der gesamte magnetische Fluß durch beide Wicklungen des Übertragers geht. Einige zusätzliche Informationen zum Aufbau eines Transformators findet der Leser im folgenden Abschnitt.

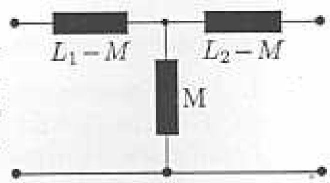


Die Impedanzmatrix des verlust- und streuungsfreien Übertragers hat die Form

$$Z = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j\omega L_1 & j\omega M \\ j\omega M & j\omega L_2 \end{pmatrix}, \text{ bei Streuungsfreiheit gilt: } L_1 \cdot L_2 = M^2.$$

L_1 und L_2 sind die Induktivitäten der Primär- und Sekundärwicklung des Übertragers. M ist die *Gegeninduktivität*.

Aus der Impedanzmatrix kann man die rechts angegebene Ersatzschaltung für einen Übertrager ableiten. Die Richtigkeit der Ersatzschaltung soll nicht bewiesen werden. Wir erkennen aber, daß bei Leerlauf am Tor 2 die Eingangsimpedanz $j\omega L_1$ gemessen wird.



Dies ist das Matrixelement

$$Z_1 = \left.\frac{U_1}{I_1}\right|_{I_2=0} = j\omega L_1.$$

Entsprechend findet man $Z_{22} = j\omega L_2$ und mit wenig mehr Mühe auch das Matrixelement $Z_{12} = j\omega M$. Es zeigt sich, daß in dieser sogenannten *T-Ersatzschaltung* des Übertragers immer genau eine der drei Induktivitäten einen negativen Wert hat. Insofern kann der Übertrager auch nicht durch diese Schaltung realisiert werden.

Bemerkung: Bei einem Übertrager mit Verlusten enthält die T-Ersatzschaltung zusätzlich Widerstände zur Berücksichtigung der Wicklungswiderstände und von "Eisenverlusten".

Mit der im Abschnitt 3.5.3.1 angegebenen Umrechnungsformel findet man die Kettenmatrix des realen Übertragers

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{Z_{21}}\begin{pmatrix} Z_{11} & |Z| \\ 1 & Z_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{j\omega M}\begin{pmatrix} j\omega L_1 & 0 \\ 1 & j\omega L_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{L_1}{M} & 0 \\ \frac{1}{j\omega M} & \frac{L_2}{M} \end{pmatrix}.$$

Dabei ist zu beachten, daß die Bedingung $L_1 L_2 = M^2$ für die Streuungsfreiheit zu der Determinante $|Z| = 0$ führt.

Mit $M = \sqrt{L_1 L_2}$ erhält man schließlich die Kettenmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \sqrt{L_1/L_2} & 0 \\ \frac{1}{j\omega M} & \sqrt{L_2/L_1} \end{pmatrix}$$

und die Kettengleichungen

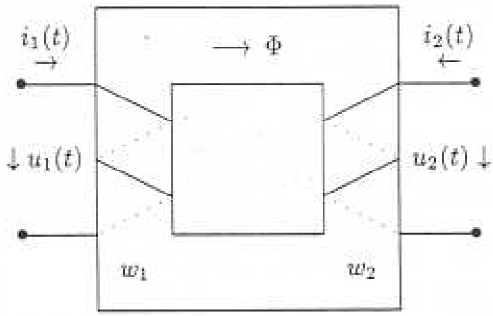
$$U_1 = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}U_2,\ I_1 = \frac{1}{j\omega M}U_2 + \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}I_2.$$

Man erkennt, daß ein verlust- und streuungsfreier Übertrager für $M \to \infty$ in einen idealen Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $\ddot{u} = \sqrt{L_1/L_2}$ übergeht.

3.6.1.3 Der Aufbau eines Transformators

Die Anordnung rechts zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Transformators. Auf einen Eisenkern sind Spulen mit w_1 bzw. w_2 Windungen gewickelt. Die Ströme i_1 und i_2 führen in dem Eisenkern zu einem magnetischen Fluß

$$\phi = K \cdot (i_1 \cdot w_1 + i_2 \cdot w_2).$$



Die Konstante K ist von der Form und den Abmessungen des Eisenkernes und auch von den magnetischen Eigenschaften des Kernmaterials abhängig. Nach dem Induktionsgesetz gilt [5]

$$u_1 = w_1 \frac{d\Phi}{dt},\ u_2 = w_2 \frac{d\Phi}{dt}.$$

[5] In der Literatur findet man häufig diese Beziehungen mit einen negativen Vorzeichen, also z.B. $u_1 = -w_1 d\Phi/dt$. Dieser Unterschied ist allerdings für die Überlegungen hier ohne Einfluß.

Dann wird mit dem oben angegebenen Ausdruck für Φ

$$u_1 = K \cdot w_1^2 \frac{di_1}{dt} + K \cdot w_1 w_2 \frac{di_2}{dt}, \; u_2 = K \cdot w_1 w_2 \frac{di_1}{dt} + K \cdot w_2^2 \frac{di_2}{dt}.$$

Mit den Abkürzungen $L_1 = K \cdot w_1^2$, $L_2 = K \cdot w_2^2$ und $M = K \cdot w_1 w_2$ erhält man dann

$$u_1(t) = L_1 \frac{di_1(t)}{dt} + M \frac{di_2(t)}{dt}, \; u_2(t) = M \frac{di_1(t)}{dt} + L_2 \frac{di_2(t)}{dt},$$

wobei $L_1 L_2 - M^2 = K^2 w_1^2 w_2^2 - K^2 w_1^2 w_2^2 = 0$ ist.

Wir erinnern uns daran, daß ein sinusförmiger Strom mit Hilfe des komplexen Stromes in der Form

$$i(t) = \hat{i}\, \cos(\omega t + \varphi) = \sqrt{2} \mathcal{R}e\{I e^{j\omega t}\}, \; I = \frac{1}{2}\sqrt{2}\, \hat{i}\, e^{j\varphi}$$

dargestellt werden kann. In diesem Sinne setzen wir in die obige Beziehung die komplexen Ströme $I_1 e^{j\omega t}$, $I_2 e^{j\omega t}$ ein und erhalten die komplexen Spannungen

$$u_1(t) = j\omega L_1 I_1 e^{j\omega t} + j\omega M I_2 e^{j\omega t} = U_1 e^{j\omega t}, \; u_2(t) = j\omega M I_1 e^{j\omega t} + j\omega L_2 I_2 e^{j\omega t} = U_2 e^{\omega t}.$$

Hieraus erhält man schließlich die vorne für komplexe Größen angegebenen Beziehungen

$$U_1 = j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2, \; U_2 = j\omega M I_1 + j\omega L_2 I_2.$$

Das Übersetzungsverhältnis beträgt $\ddot{u} = \sqrt{L_1/L_2} = w_1/w_2$, es entspricht dem Verhältnis der Windungszahlen der beiden Spulen.

3.6.2 Die Leitung

Das Bild zeigt eine Leitung der Länge l, die mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossen ist.

Zur Erinnerung: Wenn ein Zweitor mit seinem Wellenwiderstand $Z_2 = Z_W$ abgeschlossen ist, wird am Tor 1 der gleiche Widerstand $Z_1 = Z_2 = Z_W$ gemessen.

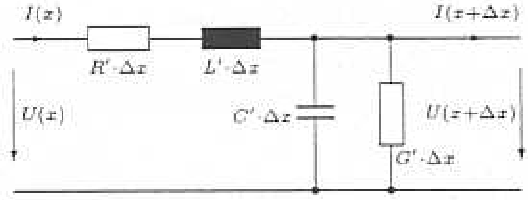
Ohne Beweis wird die Kettenmatrix für ein aus einer Leitung der Länge l bestehendes Zweitores angegeben:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_W \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_W} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{pmatrix},$$

$$Z_W = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}, \; \gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} = \alpha + j\beta.$$

Z_W ist der Wellenwiderstand der Leitung und γ die sogenannte *Fortpflanzungskonstante*. Den Realteil α nennt man *Dämpfungskonstante*, den Imaginärteil β *Phasenkonstante*.

Die Bedeutung der Größen R', L', G', C' geht aus dem (rechten) Ersatzschaltbild für ein ganz kleines Leitungsstück der Länge Δx hervor. Man bezeichnet diese Größen als *Leitungsbeläge*. Ihre Einheiten sind Ω/m, H/m, Ω^{-1}/m und F/m.



Aus diesem Ersatzschaltbild für ein ganz kleines Leitungsstück können Differentialgleichungen zur Berechnung der Ströme und Spannungen längs einer Leitung aufgestellt werden. Aus diesen Gleichungen kann auch die oben angegebene Kettenmatrix gewonnen werden.

Aus der Kettengleichung

$$U_1 = A_{11}U_2 + A_{12}I_2$$

erhält man mit $U_1 = U_0$, $I_2 = U_2/Z_W$ und den Elementen der vorne angegebenen Kettenmatrix

$$U_0 = \Big(\cosh(\gamma l) + \frac{1}{Z_W} Z_W \sinh(\gamma l)\Big) \cdot U_2 = U_2 \cdot e^{\gamma l}.$$

Hinweis: $\cosh x = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$, $\sinh x = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$.

Damit ergibt sich die Übertragungsfunktion einer mit dem Wellenwiderstand abgeschlossenen Leitung

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_0} = e^{-\gamma l} = e^{-\alpha l}e^{-j\beta l}.$$

Für die Ausgangsspannung erhalten wir

$$U_2 = U_0 \cdot e^{-\alpha l}e^{-j\beta l}$$

und dies bedeutet, daß der Betrag der Ausgangsspannung

$$|U_2| = |U_0| \cdot e^{-\alpha l}$$

exponentiell mit der Leitungslänge abnimmt.

Bei der *verlustfreien Leitung* ($R' = 0$, $G' = 0$) erhalten wir einen reellen Wellenwiderstand und eine rein imaginäre Fortpfanzungskonstante

$$Z_W = R_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}},\ \gamma = j\omega\sqrt{L'C'} = j\beta,\ (\alpha = 0).$$

Mit $\cosh(jx) = \cos x$, $\sinh(jx) = j\sin x$ findet man die Kettenmatrix der verlustfreien Leitung

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos(\beta l) & jR_W \sin(\beta l) \\ j\frac{1}{R_W}\sin(\beta l) & \cos(\beta l) \end{pmatrix},\ Z_W = R_W = \sqrt{\frac{L'}{C'}},\ \beta = \omega\sqrt{L' \cdot C'}.$$

Für die Ausgangsspannung erhält man bei der verlustfreien leitung

$$U_2 = U_0 e^{-j\beta l}.$$

Es gilt nun $|U_2| = |U_0|$, die Ausgangsspannung ist gegenüber der Eingangsspanng lediglich phasenverschoben.

Zusätzliche Hinweise:

1. *Signalübertragung*
Man kann zeigen, daß bei verlustlosen und mit ihrem Wellenwiderstand abgeschlossenen Leitungen

$$u_2(t) = u_1(t - t_0) \text{ mit } t_0 = \sqrt{L'C'} \cdot l$$

gilt. Dies bedeutet, daß das Eingangssignal $u_0(t)$ am Leitungsende verzögert, ansonsten aber unverändert ankommt. Die Verzögerungszeit hängt natürlich von der Leitungslänge ab (Laufzeit!). Bei nicht verlustfreien Leitungen gilt mit einigen Einschränkungen

$$u_2(t) = e^{-\alpha \cdot l} \cdot u_0(t - t_0).$$

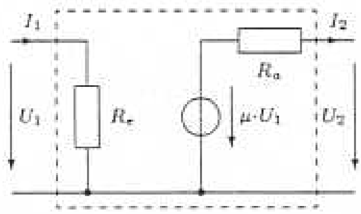
Das Signal wird jetzt nicht nur verzögert, sondern zusätzlich noch "gedämpft". Die Dämpfung nimmt mit der Leitungslänge zu. Aus diesem Grunde baut man in der Praxis in gewissen Abständen Verstärker ein, die das gedämpfte Signal wieder verstärken.

Diese Aussagen gelten nur bei einem Abschluß der Leitung mit ihrem Wellenwiderstand. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist (Fehlanpassung), treten unerwünschte Reflexionen auf der Leitung auf und das Eingangssignal wird nicht unverzerrt zum Ausgang übertragen.

2. *Typen von Leitungen*
Flachbandkabel bestehen aus zwei Drähten, die durch einen Kunststoffsteg getrennt sind. Solche Leitungen haben oft einen Wellenwiderstand von 240 Ω. Ihr Nachteil ist, daß sie durch elektrische und magnetische Felder stark gestört werden können. *Verdrillte Leitungen* weisen hingegen eine wesentlich geringere Störempfindlichkeit auf. *Koaxialleitungen* bestehen aus einem runden Innenleiter und einem kreisförmigen leitenden Außenleiter. Sie sind vollständig gegen äußere Störfelder geschützt. Typische Werte für Wellenwiderstände von Koaxialleitungen sind 50 Ω, 60 Ω und auch 75 Ω. Der ausnutzbare Frequenzbereich geht bei Koaxialkabeln bis in den GHz-Bereich. Für Übertragungen in einem noch höheren Frequenzbereich kommen *Wellenleiter* (Mikrowellenbereich) und *Glasfaserleitungen* zum Einsatz.

3.6.3 Schaltungen mit Verstärkern

3.6.3.1 Der Verstärker



Das Bild zeigt die Grundschaltung eines Verstärkers mit dem Eingangswiderstand R_e und dem Ausgangswiderstand R_a. Die Schaltung enthält eine sogenannte *gesteuerte Quelle*, genauer eine spannungsgesteuerte Spannungsquelle.
Aus der Schaltung entnehmen wir die Beziehungen

$$U_1 = R_e I_1, \; U_2 = \mu U_1 - R_a I_2.$$

Diese Gleichungen können folgendermaßen umgestellt werden

$$U_1 = \frac{1}{\mu} U_2 + \frac{R_a}{\mu} I_2, \; I_1 = \frac{1}{R_e} U_1 = \frac{1}{\mu R_e} U_2 + \frac{R_a}{\mu R_e} I_2$$

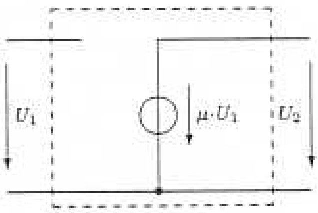
und daraus ergibt sich die Kettenmatrix des Verstärkers

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & \frac{R_a}{\mu} \\ \frac{1}{\mu R_e} & \frac{R_a}{R_e}\frac{1}{\mu} \end{pmatrix}.$$

Im allgemeinen wünscht man sich einen Verstärker mit einem möglichst großen Eingangswiderstand R_e und einem möglichst kleinen Ausgangswiderstand R_a. Durch den großen Widerstand R_e am Tor 1 stellt der Verstärker keine Belastung für die vorhergehende Stufe dar. Der kleine Widerstand R_a am Tor 2 sorgt dafür, daß die Verstärkerausgangsspannung U_2 nicht von dem Strom I_2 abhängt.

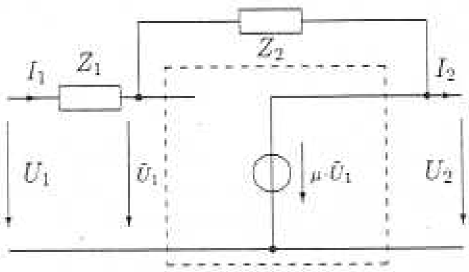
Unter der Voraussetzung $R_e \to \infty$, $R_a \to 0$ erhalten wir die Kettenmatrix des *idealen Verstärkers* mit der rechts skizzierten Ersatzschaltung

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$



Bei diesem idealen Verstärker gilt $I_1 = 0$ und $U_2 = \mu \cdot U_1$.

Von großer praktischer Bedeutung ist die Beschaltung des idealen Verstärkers mit zwei Impedanzen Z_1 und Z_2, wie unten dargestellt.



Aus dieser Schaltung entnehmen wir die Beziehungen

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{\mu} U_2, \; \tilde{U}_1 = U_1 - I_1 Z_1, \; I_1 = \frac{U_1 - U_2}{Z_1 + Z_2}.$$

Daraus erhält man die Beziehungen

$$\tilde{U}_1 = \frac{1}{\mu} U_2 = U_1 - I_1 Z_1 = U_1 - \frac{U_1 - U_2}{Z_1 + Z_2} Z_1, \; U_2\left(\frac{1}{\mu} - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\right) = U_1\left(1 - \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)$$

und schließlich die Übertragungsfunktion

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{\mu Z_2}{Z_1 + Z_2 - \mu Z_1}.$$

Wir wollen auch noch die Eingangsimpedanz $W_1 = U_1/I_1$ der Schaltung am Tor 1 berechnen. Mit den oben angegebenen Beziehungen

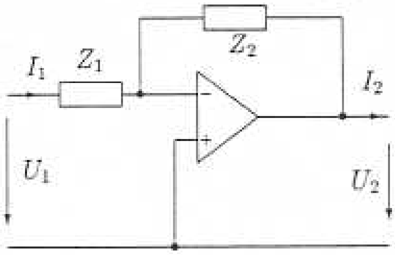
$$I_1 = \frac{U_1 - U_2}{Z_1 + Z_2}, \; U_2 = U_1 \cdot G(j\omega) = U_1 \cdot \frac{\mu Z_2}{Z_1 + Z_2 - \mu Z_1}$$

erhält man nach elemtarer Rechnung

$$W_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{Z_1 + Z_2 - \mu Z_1}{1 - \mu}.$$

3.6.3.2 Schaltungen mit Operationsverstärkern

In der Praxis verwendet man als Verstärker sogenannte *Operationsverstärker*, die als integrierte Bausteine preiswert zur Verfügung stehen. Operationsverstärker erfüllen die Voraussetzung eines sehr großen Eingangswiderstandes ($R_e \to \infty$) und eines sehr kleinen Ausgangswiderstandes ($R_a \to 0$). Außerdem haben Operationsverstärker eine sehr große Verstärkung ($\mu = 10^4 \dots 10^6$), so daß man bei der Rechnung $\mu = \infty$ setzen kann.



Rechts ist ein mit den beiden Impedanzen beschalteter Operationsverstärker mit dem üblichen Schaltungssymbol skizziert. Das Minuszeichen kennzeichnet den sogenannten invertierenden Eingang des Operationsverstärkers und das Pluszeichen den nichtinvertierenden Eingang.
Unter der bei Operationsverstärkern zulässigen Voraussetzung $\mu = \infty$ hat die Schaltung nach den im Abschnitt 3.6.3.1 angegebenen Beziehungen die Übertragungsfunktion und die Eingangsimpedanz

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{Z_2}{Z_1}, \; W_1 = \frac{U_1}{I_1} = Z_1.$$

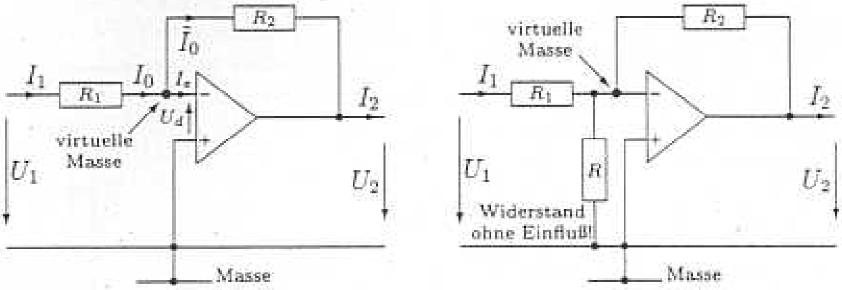
Die soeben angegebene Übertragungsfunktion ist insofern interessant, weil sie nur von der äußeren Beschaltung (Z_1, Z_2) des Operationsverstärkers abhängt, nicht aber von den Eigenschaften des Verstärkers selbst. Wegen des negativen Vorzeichens bei der Übertragungsfunktion spricht man hier von einem *invertierenden* Verstärker. In der Regel spielt diese Invertierung keine große Rolle. Wo notwendig, müssen ggf. zwei invertierende Verstärker hintereinandergeschaltet werden. Selbstverständlich gibt es aber auch nichtinvertierende Verstärkerschaltungen mit Operationsverstärkern.

Einige Ergänzungen
1. Faßt man die obige Schaltung des mit Z_1 und Z_2 beschalteten Operationsverstärkers als Zweitorschaltung auf, dann hat diese die Kettenmatrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -\frac{Z_1}{Z_2} & 0 \\ -\frac{1}{Z_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: $U_1 = -\frac{Z_1}{Z_2}U_2$, $I_1 = \frac{U_1}{Z_1} = -\frac{1}{Z_2}U_2$.

2. Das Bild zeigt links nochmals den jetzt mit den beiden Widerständen R_1 und R_2 beschalteten Operationsverstärker und zusätzlich einige in der Schaltung eingetragene Ströme. Dabei ist (hier) natürlich $I_0 = I_1$.



Wegen des sehr (theoretisch unendlich) großen Eingangswiderstandes des Operationsverstärkers kann der Eingangsstrom I_e vernachlässigt werden. Dadurch fließt (fast) der gesamte Eingangsstrom über Z_2: $\bar{I}_0 \approx I_0$. Außerdem ist die Eingangsspannung am Operationsverstärker sehr klein: $U_d \approx 0$. Dies muß auch so sein. Der Operationsverstärker hat eine sehr große Verstärkung ($\mu \to \infty$). Eine endliche Ausgangsspannung $U_2 = \mu U_d$ bedingt einem sehr kleinen Wert U_d. Die in der Praxis vernachlässigbar kleine Spannung U_d führt dazu, daß der obere Eingang des Operationsverstärkers "•" praktisch an der Masse liegt, man spricht hier von einer *virtuellen Masse*. Dies bedeutet z.B., daß ein an die Eingangsklemmen geschalteter Widerstand R (rechter Bildteil) keinen Einfluß auf die Spannungen und Ströme in der Schaltung hat. Wegen $U_d \approx 0$ fließt durch ihn kein Strom, es gilt weiterhin $W_1 = \frac{U_1}{I_1} = R_1$, $G = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{R_2}{R_1}$ und $\bar{I}_0 = I_0$.

Schließlich folgt aus der Maschengleichung $U_2 + U_d + \bar{I}_0 R_2 = 0$ mit $U_d = 0$ und $\bar{I}_0 = I_0$ die wichtige Beziehung

$$U_2 = -I_0 \cdot R_2.$$

Bei der oben angegebenen Schaltung ist $I_0 = I_1 = \frac{U_1}{R_1}$ und damit erhält man die vorne abgeleitete Gleichung $U_2 = -\frac{R_2}{R_1} U_1$.

Hinweis: Einige der hier gemachten Aussagen, z.B. die, daß der Widerstand R in der rechten Schaltung ohne Einfluß bleibt, sind physikalisch sehr schlecht einzusehen. Es muß hier aber bedacht werden, daß wir mit einem idealen Verstärker rechnen. In solchen Fällen versagt bisweilen die Anschauung. Zu richtigen Ergebnissen kann man dann eigentlich nur durch eine genaue Analyse der Schaltung mit einem endlichen Wert für die Verstärkung und dem nachfolgenden Grenzübergang $\mu \to \infty$ kommen.

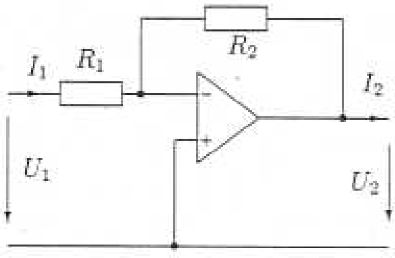
3. Wie jeder reale Verstärker hat auch der Operationsverstärker eine obere Grenzfrequenz f_0, oberhalb der die Vertärkung abfällt. Der Operationsverstärker zeigt dann ein *Tiefpaßverhalten*. Wir bezeichnen die Verstärkung des Operationsverstärkers bei sehr niedrigen Frequenzen jetzt mit μ_0. Dann gilt für höhere Frequenzen näherungsweise

$$\mu = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{f}{f_0}}, \quad |\mu| = \frac{\mu_0}{\sqrt{1 + (f/f_0)^2}}.$$

Bei der (Grenz-) Frequenz f_0 ist der Betrag der Verstärkung auf den Wert $0,707 \cdot \mu_0$ abgeklungen (Dämpfung: 3 dB). Bei beschalteten Operationsverstärkern mit einer insgesamt wesentlich kleineren (Gesamt-) Verstärkung wirkt sich die Abnahme von μ mit der Frequenz wesentlich weniger aus, so daß Schaltungen mit Operationsverstärkern auch bei höheren Frequenzen (einige 100 KHz) problemlos einsetzbar sind.

Beispiele

1. *Der "einfache" Verstärker*

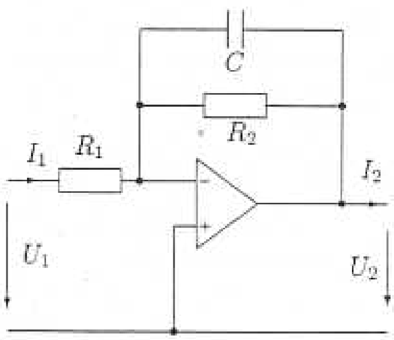


Das Bild zeigt die Beschaltung des Operationsverstärkers mit zwei Widerständen. Dann erhält man die frequenzunabhängige Übertragungsfunktion

$$G(j\omega) = -\frac{R_2}{R_1}.$$

Im Fall $R_2 > R_1$ wird $|U_2| > |U_1|$, dies bedeutet eine "echte Verstärkung". Bei $R_2 < R_1$ wird $|U_2| < |U_1|$.

2. *Der aktive Tiefpaß*



Bei der rechts skizzierten Schaltung ist

$$Z_1 = R_1, \; Z_2 = \frac{R_2/(j\omega C)}{R_2 + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R_2}{1 + j\omega C R_2}.$$

Damit erhalten wir die Übertragungsfunktion

$$G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2/R_1}{1 + j\omega C R_2}.$$

Wir setzen jetzt $R_1 = R_2 = R$ und finden

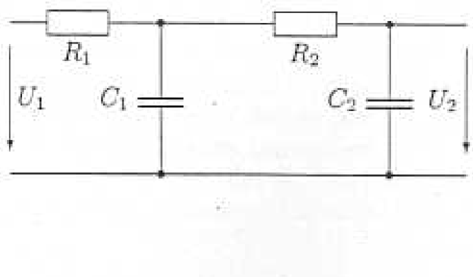
$$G(j\omega) = -\frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Dies ist, bis auf das negative Vorzeichen, die gleiche Übertragungsfunktion des im Abschnitt 3.3.2.2 besprochenen RC-Tiefpasses. Dort wurde eine passive Realisierung angegeben, hier eine aktive. Die aktive Realisierung erfordert im vorliegenden Fall einen wesentlich höheren Auswand wie die passive.

3.6.3.3 Beispiele

Ein RC-Tiefpaß 2. Grades

Bei dem RC-Tiefpaß vom Abschnitt 3.3.2.2 und ebenso bei der aktiven Schaltung (2. Beispiel im vorhergehenden Abschnitt) spricht man von einem Tiefpaß 1. Grades, weil $j\omega$ in der Übertragungsfunktion nur in der 1. Potenz auftritt.



Wir untersuchen nun die rechts skizzierte Tiefpaßschaltung, die als Hintereinanderschaltung zweier Tiefpässe 1. Grades aufgefaßt werden kann. Zur Berechnung der Übertragungsfunktion benutzen wir die vorne abgeleitete Gleichung

$$G(j\omega) = \frac{1}{A_{11}}$$

(siehe Abschnitt 3.5.3.1).

Die gegebene Tiefpaßschaltung kann auch als Kettenschaltung von vier Teilzweitoren angesehen werden. Ein Teilzweitor enthält entweder einen Widerstand im Längszweig oder eine Kapazität im Querzweig. Damit wird

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & R_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega C_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für die weitere Rechnung nehmen wir an, daß $R_1 = R_2 = R$ und $C_1 = C_2 = C$ ist. Dann erhält man, wenn man zunächst das Produkt der beiden ersten und das der beiden letzten Matrizen bildet

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{pmatrix}.$$

Von der Matrix $\boldsymbol{A}$ interessiert uns nur das für die Bestimmung der Übertragungsfunktion notwendige Element A_{11}. Wir erhalten

$$A_{11} = (1 + j\omega RC)^2 + j\omega RC = 1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2$$

und damit die Übertragungsfunktion

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + 3j\omega RC + (j\omega)^2 R^2 C^2}.$$

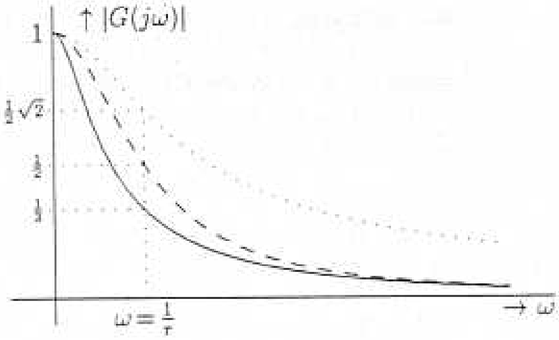
Die Übertragungsfunktion der einfachen RC-Schaltung lautet

$$\tilde{G}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad |\tilde{G}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad \tau = RC.$$

Um einen Vergleich mit der Übertragungsfunktion der hier untersuchten Schaltung durchführen zu können, setzten wir auch dort $RC = \tau$ und erhalten dann den Betrag

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2\tau^2)^2 + 9\omega^2\tau^2}}.$$

Diese Betragsfunktion ist im rechten Bild (ausgezogen) skizziert. Bei der Frequenz $\omega = \frac{1}{\tau}$ ergibt sich der Betrag $|G(j/\tau)| = 1/3$. Zum Vergleich ist der Betrag $|\tilde{G}(j\omega)|$ der Übertragungsfunktion der RC-Schaltung 1. Grades ebenfalls (gepunktet) in dem Bild eingetragen. Diese Funktion hat bei der Frequenz $\omega = 1/\tau$ den Betrag $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die Frequenz $\omega = 1/\tau$ hat hier die Bedeutung der Grenzfrequenz.



Es stellt sich die Frage, warum die Übertragungsfunktion der Schaltung 2. Grades nicht das Produkt von Übertragungsfunktionen 1. Grades ist. Die hier untersuchte RC-Schaltung kann doch als

Hintereinanderschaltung zweier einfacher RC-Tiefpässe angesehen werden. Die Begründung liegt darin, daß das Anfügen der 2. einfachen RC-Schaltung den 1. Schaltungsteil belastet.

Dieses Problem könnte man mit der rechts skizzierten Schaltung umgehen.

Zwischen die beiden einfachen RC-Tiefpässe ist ein Trennverstärker mit einem sehr großen Eingangswiderstand, einen sehr kleinen Ausgangswiderstand und der Verstärkung 1 geschaltet. Dadurch belastet der 2. Schaltungsteil den 1. Teiltiefpaß nicht mehr.

Wir erhalten bei dieser Anordnung zunächst

$$\bar{U} = G_1(j\omega) \cdot U_1 = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} U_1.$$

Wegen des Trennverstärkers ist $\bar{U}$ die Eingangsspannung für den 2. Schaltungsteil, es wird

$$U_2 = G_2(j\omega)\bar{U} = \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2} \bar{U}$$

und mit $\bar{U} = G_1(j\omega)U_1$

$$U_2 = G_1(j\omega)G_2(j\omega)U_1 = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_1} \cdot \frac{1}{1 + j\omega R_2 C_2} U_1.$$

Die Gesamtübertragungsfunktion ergibt sich als Produkt der beiden Teilübertragungsfunktionen

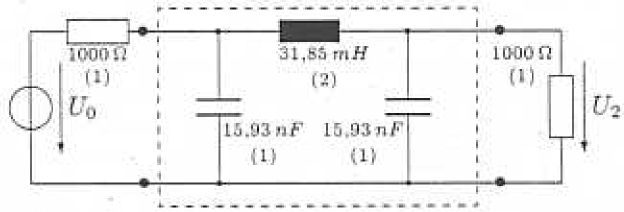
$$G(j\omega) = G_1(j\omega) \cdot G_2(j\omega).$$

In dem Bild ist für $R_1 = R_2 = R$, $C_1 = C_2 = C$ der Betrag dieser Funktion gestrichelt eingetragen. Man erkennt die Abweichung zur Übertragungsfunktion der Schaltung ohne die Entkopplung durch einen Trennverstärker.

Bei aktiven Filterschaltungen ist eine Entkopplung der Schaltungsteile oft gegeben, so daß dort die Teilübertragungsfunktionen multipliziert werden dürfen.

2. Ein Potenztiefpaß, normierte Rechnung

Das Bild zeigt einen sogenannten Potenz-Tiefpaß 3. Grades, der bei seiner Grenzfrequenz $f_g = 10000$ Hz eine Dämpfung von 3 dB aufweist. Als Übertragungsfunktion wird hier der Quotient $G(j\omega) = 2\frac{U_2}{U_0}$ definiert.



In der Schaltung sind auch die Bauelementewerte angegeben, auf die eingeklammerten Zahlen kommen wir anschließend zu sprechen.

Zur Berechnung der Übertragungsfunktion ist es günstig, von der im Abschnitt 3.5.3.4 angegebenen Beziehung (hier mit dem Faktor 2!)

$$G(j\omega) = 2\frac{U_2}{U_0} = \frac{2}{A_{11} + A_{12}/R_2 + A_{21}R_1 + A_{22}R_1/R_2}$$

auszugehen. R_1 und R_2 sind dabei die Widerstände, in die das Zweitor eingebettet ist. Im vorliegenden Fall ist $R_1 = R_2 = R = 1000\,\Omega$. Zur Berechnung der Übertragungsfunktion muß demnach die Kettenmatrix des (umrandeten) Zweitores berechnet werden.

An dieser Stelle stoßen wir auf das Problem, daß wir mit Zahlenwerten rechnen müssen, die viele Zehnerpotenzen auseinanderliegen und überdies hinaus noch viele Stellen aufweisen. In der Elektrotechnik rechnet man in solchen Fällen häufig *normiert*. Um eine normierte Schaltung zu erhalten, legt man zunächst einen geeigneten *Bezugswiderstand* R_b fest. Hier wählen wir $R_b = 1000\,\Omega$. Nach dieser Festlegung werden alle Widerstände in der Schaltung auf diesen Bezugswiderstand bezogen, es entstehen normierte Widerstände $R_n = R/R_b$. Im vorliegenden Fall ergeben sich die beiden (in Klammern angegebenen) normierten Widerstände $R_{1_n} = R_{2_n} = 1$. Als 2. Bezugsgröße wählt man eine *Bezugsfrequenz* f_b, auf die alle Frequenzen bezogen werden. Hier wählen wir $f_b = f_g = 10$ kHz. Dies bedeutet, daß die Grenzfrequenz bei der normierten Frequenz 1 liegt. Eine normierte Frequenz von 2 bedeutet eine wirkliche Frequenz von 20 kHz. Schließlich werden noch alle Impedanzen auf den Bezugswiderstand bezogen.

Damit erhalten wir bei einer Induktivität, wenn noch $f = f_n \cdot f_b$ bzw. $\omega = \omega_n \cdot \omega_b$ beachtet wird

$$\omega L \Rightarrow \frac{\omega L}{R_b} = \omega_n \frac{\omega_b L}{R_b} = \omega_n \cdot L_n \text{ mit } L_n = \frac{\omega_b L}{R_b}.$$

Im vorliegenden Fall finden wir die normierte Induktivität ($f_b = 10000$ Hz, $R_b = 1000\,\Omega$, $L = 31,85 \cdot 10^{-3}$ H)

$$L_n = \frac{2\pi \cdot 10000 \cdot 0,03185}{1000} = 2,$$

dies ist der in der Schaltung in Klammern eingetragene Wert.

Für eine Kapazität erhält man entsprechend

$$\frac{1}{\omega C} \Rightarrow \frac{1}{\omega C R_b} = \frac{1}{\omega_n \cdot \omega_b C R_b} = \frac{1}{\omega_n \cdot C_n} \text{ mit } C_n = \omega_b C R_b.$$

Im vorliegenden Fall finden wir die normierten Kapazitäten ($f_b = 10000$ Hz, $R_b = 1000\,\Omega$, $C = 15,93$ nF)

$$C_n = 2\pi \cdot 10000 \cdot 15,93\,10^{-9} \cdot 1000 = 1.$$

Nun können wir mit den sehr viel einfacheren normierten Werten rechnen und erhalten die Kettenmatrix des Zweitores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2j\omega \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ j\omega & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2(j\omega)^2 & 2j\omega \\ 2j\omega + 2(j\omega)^3 & 1+2(j\omega)^2 \end{pmatrix}.$$

Dann erhalten wir nach der oben angegebenen Beziehung und den normierten Bauelementewerten die Übertragungsfunktion[6]

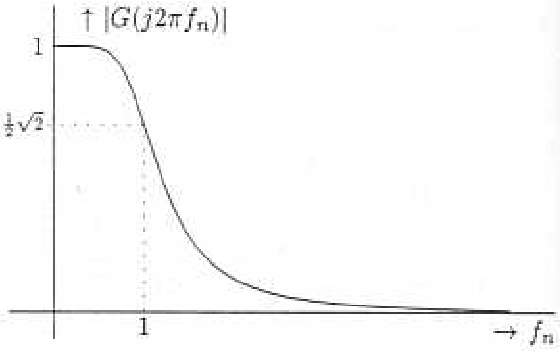
$$G(j\omega) = 2\frac{U_2}{U_0} = \frac{2}{2 + 4j\omega + 4(j\omega)^2 + 2(j\omega)^3}.$$

Die Betragsbildung führt nach einigen Rechenschritten zu dem Ergebnis

$$|G(j\omega)| = 1/|1 - 2\omega^2 + j\omega(2-\omega^2)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^6}}.$$

[6]Im vorliegenden Fall wird die "eigentliche" Übertragungsfunktion mit dem Faktor 2 multipliziert, damit man bei $f = 0$ den Wert $G(0) = 1$ erhält. Der Faktor hat auf die Frequenzabhängigeit ansonsten keinen Einfluß.

Diese Betragsfunktion ist rechts in Abhängigkeit von der normierten Frequenz aufgetragen. Bei $f_n = 1$ ist die wirkliche (Grenz-) frequenz $f_g = 10000$ Hz.
Aus der Schaltung mit den normierten Bauelementewerten erhält man die "richtige" Schaltung durch eine *Entnormierung* zurück.



Durch die Umstellung der oben angegebenen Beziehungen folgt

$$R = R_n \cdot R_b, \; L = L_n \frac{R_b}{\omega_b}, \; C = C_n \frac{1}{\omega_b R_b}.$$

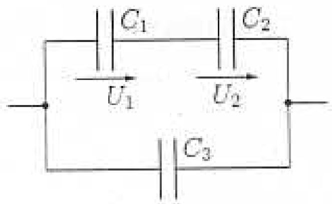
A.2 Aufgaben zum 3. Kapitel

Aufgabe 3.1

Gegeben ist ein Kondensator mit einer Kapazität von $10\,\mu F$, der auf eine Spannung von 200 V aufgeladen ist.
a) Welche Ladung ist in dieser Kapazität gespeichert?
b) In Reihe mit dieser Kapazität befindet sich ein weiterer Kondensator mit einer Kapazität von $20\,\mu F$. Welche Spannung liegt an diesem Kondensator? Wie groß ist die Gesamtkapazität der Anordnung?
c) Zu dem anfangs gegebenen auf 200 V aufgeladenen Kondensator liegt nun eine Kapazität der Größe von $5\,\mu F$ parallel. Wie groß ist die Gesamtkapazität und wie groß die insgesamt vorhandenen Ladung?

Aufgabe 3.2

Bei der Schaltung befindet sich auf dem unteren Kondensator mit der Kapazität $C_3 = 100\,\mu F$ eine Ladung von 0,1 As. Berechnen Sie die an den beiden oberen Kondensatoren $C_1 = 50\,\mu F$ und $C_2 = 150\,\mu F$ auftretenden Spannungen U_1 und U_2.



Aufgabe 3.3

An einem Kondensator mit der Kapazität $C = 20\,\mu F$ liegt eine Spannung $u(t) = 100 \cdot cos(\omega t)$ mit der Frequenz $f = 1000$ Hz. Berechnen Sie den durch den Kondensator fließenden Strom $i(t)$.

Aufgabe 3.4

Gegeben sind die folgenden sinusförmigen Ströme und Spannungen.

$$i(t) = 2 \cdot \cos(\omega t) \qquad i(t) = -2 \cdot \cos(\omega t) \qquad i(t) = 5 \cdot \cos(\omega t - \pi/3)$$
$$i(t) = -5 \cdot \cos(\omega t + \pi/6) \qquad i(t) = \sin(\omega t) \qquad i(t) = 0.5 \cdot \cos(\omega t + \pi)$$
$$u(t) = 3 \cdot \cos(\omega t) \qquad u(t) = -2 \cdot \cos(\omega t - 0,3) \qquad u(t) = 10 \cdot \cos(\omega t - \pi/3)$$
$$u(t) = -6 \cdot \cos(\omega t - \pi/6) \qquad u(t) = -\sin(\omega t) \qquad u(t) = 1,5 \cdot \cos(\omega t + \pi/8)$$

Anzugeben sind:
a) Die komplexen Ströme und Spannungen.
b) Die Effektivwerte.
c) Die mittleren Leistungen, wenn der gegebenen Strom durch einen Widerstand von $R = 5\,\Omega$ fließt bzw. die betreffende Spannung an diesem Widerstand anliegt

Aufgabe 3.5

Gegeben sind die folgenden komplexen Ströme und Spannungen.

$$I = 2 \quad I = 3e^{j} \quad I = -2 \quad I = 0,5 \cdot e^{j\pi/3} \quad I = -j$$
$$U = 1 - j \quad U = 6 \cdot e^{-j} \quad U = j \quad U = 2 - 3j \quad U = 5 + j6$$

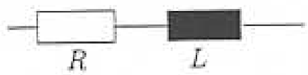
Zu berechnen sind die Effektivwerte und die zugehörenden sinusförmigen Ströme und Spannungen bei einer angenommenen Kreisfrequenz ω.

Aufgabe 3.6

Durch eine Induktivität $L = 0,8$ H fließt ein Strom $i(t) = 5 \cdot \cos(\omega t - \pi/4)$. Die Kreisfrequenz hat den Wert $\omega = 1000\,s^{-1}$. Berechnen Sie die an der Induktivität auftretende Spannung $u(t)$. Die Rechnung soll einmal im "Zeitbereich" (u=L di/dt) und einmal mit der komplexen Rechnung durchgeführt werden.

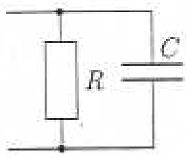
Aufgabe 3.7

Die Impedanz Z der Schaltung soll berechnet werden. Skizzieren Sie den Verlauf des Betrages $|Z|$ und des Phasenwinkels φ bei den Werten $R = 1\,\Omega$ und $L = 1$ H.
Stellen Sie Z im Fall $\omega = 1$ und $\omega = 2$ als Zeiger in der komplexen Ebene dar.



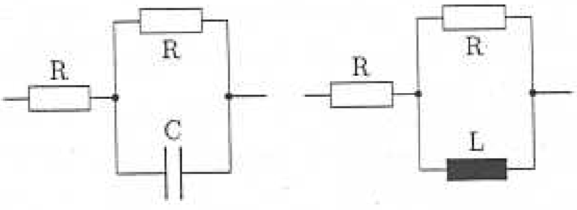
Aufgabe 3.8

Die Impedanz Z der Schaltung soll berechnet werden. Skizzieren Sie den Verlauf des Betrages $|Z|$ und des Phasenwinkels φ bei den Werten $R = 1\,\Omega$ und $C = 100\,\mu F$ (Frequenzbereich $\omega \geq 10^3\,s^{-1}$).
Stellen Sie Z im Fall $\omega = 10^4$ als Zeiger in der komplexen Ebene dar.



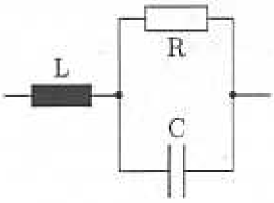
Aufgabe 3.9

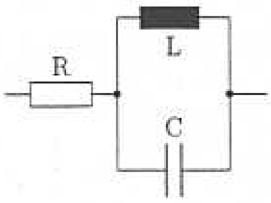
Berechnen Sie die Impedanzen der folgenden Schaltungen. Geben Sie jeweils den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag und Phasenwinkel an.

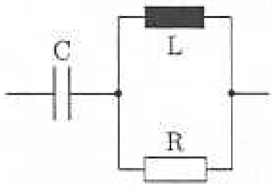


Aufgabe 3.10

Berechnen Sie die Impedanzen der folgenden Schaltungen. Geben Sie jeweiles den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag und Phasenwinkel an.

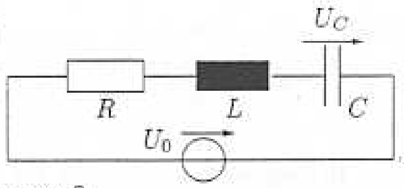






Aufgabe 3.11

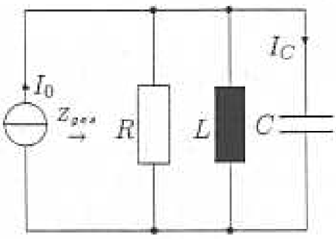
Stellen Sie eine Beziehung für U_C/U_0 und den Betrag $|U_C/U_0|$ auf. Skizzieren Sie die Betragsfunktion $|U_C/U_0|$ bei den (normierten) Bauelementewerten $L = 1$, $C = 1$ und den Widerstandswerten R=0,2, $R = 0,1$, $R = 0,05$.



Wie groß sind die jeweiligen Spulengüten bei der Resonanzfrequenz?

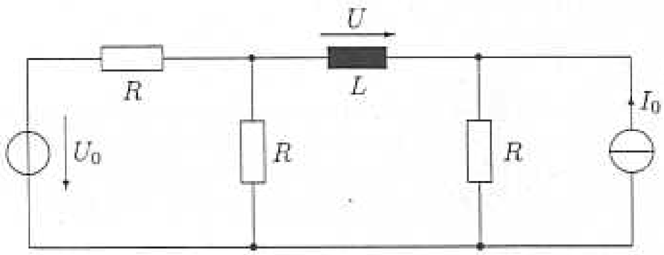
Aufgabe 3.12

a) Berechnen Sie die Eingangsimpedanz Z_{ges} der nebenstehenden Schaltung. Bei welchem ω-Wert wird der Betrag dieser Impedanz maximal? Wie groß ist dieser Maximalwert?
b) Ermitteln Sie eine Beziehung für I_C/I_0 und den Betrag $|I_C/I_0|$. Skizzieren Sie diese Betragsfunktion bei den (normierten) Bauelementewerten $L = 1$, $C = 1$ und $R = 100$.



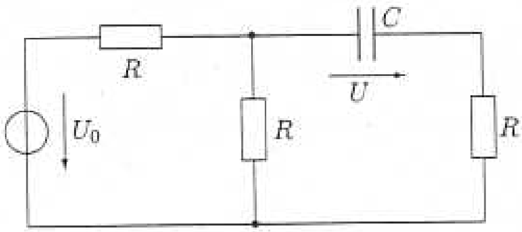
Aufgabe 3.13

Berechnen Sie die an der Induktivität L anliegende Spannung mit Hilfe des Überlagerungssatzes. Wie groß ist U im Falle $U_0 = 10$ V, $I_0 = 2 \cdot e^{j\pi/3}$, $R = 5\,\Omega$, $L = 0,5$ H bei einer Kreisfrequenz $\omega = 10\,s^{-1}$?



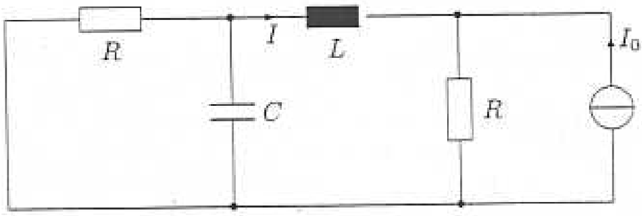
Aufgabe 3.14

Berechnen Sie die an der Kapazität C anliegende Spannung mit Hilfe des Satzes von der Ersatzspannungsquelle. Berechnen Sie die Spannung speziell bei den Werten $U_0 = 10$ V, $R = 10\,\Omega$, $C = 10\,\mu F$ bei einer Kreisfrequenz $\omega = 10000\,s^{-1}$.



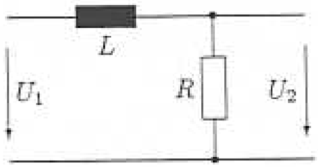
Aufgabe 3.15

Berechnen Sie den durch die Induktivität L fließenden Strom zunächst mit Hilfe des Satzes von der Ersatzspannungsquelle und dann mit dem Stromteilungssatz.



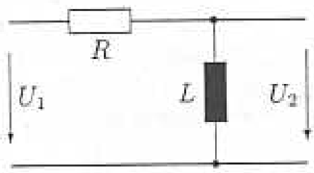
Aufgabe 3.16

Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$. Skizzieren Sie den Betrag und den Phasenwinkel der Übertragungsfunktion. Verwenden Sie die Abkürzung $\tau = L/R$.
Um was für eine Schaltung handelt es sich hier?



Aufgabe 3.17

Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$. Skizzieren Sie den Betrag und den Phasenwinkel der Übertragungsfunktion. Verwenden Sie die Abkürzung $\tau = L/R$.
Um was für eine Schaltung handelt es sich hier?



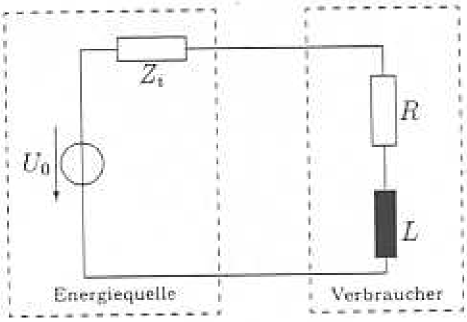
Aufgabe 3.18

Das Bild zeigt eine Energiequelle und einen induktiven Verbraucher. Die Innenimpedanz Z_i der Quelle soll so festgelegt werden, daß eine Leistungsanpassung auftritt.

a) Bestimmen Sie zunächst einen allgemeinen Ausdruck für Z_i.

b) Geben Sie eine für 50 Hz gültige Schaltung für die Innenimpedanz an. Dabei soll $R = 100\,\Omega$ und $L = 0,5$ H sein.

c) Berechnen Sie die komplexe Leistung am Verbraucher bei $U_0 = 400$ V.

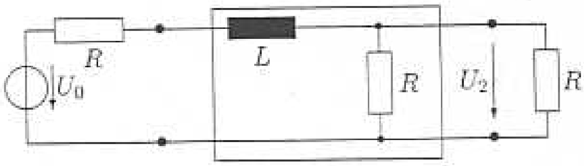


d) Berechnen Sie alle Wirk- und Blindleistungen in der Schaltung. Die Rechnung soll bei der Frequenz von 50 Hz mit den oben angegebenen Bauelementewerten bei $U_0 = 400$ V erfolgen.

Aufgabe 3.19

a) Berechnen Sie die Kettenmatrix des durch den Rahmen markierten Zweitores.

b) Ausgehend vom Ergebnis nach der Frage a soll die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_0$ berechnet werden.

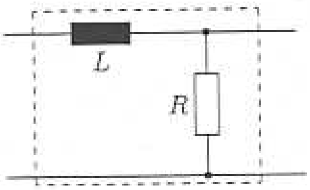


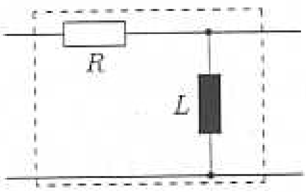
c) Berechnen und skizzieren Sie den Betrag der Übertragungsfunktion.

d) Berechnen Sie die Eingangsimpedanz am Tor 1 des Zweitores. Die Berechnung soll einmal unter Verwendung der Kettenmatrix und dann auf elementare Weise erfolgen.

Aufgabe 3.20

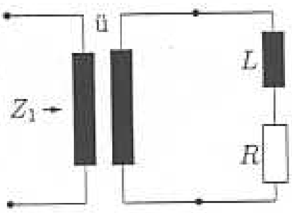
Berechnen Sie die Kettenmatrizen der rechts skizzierten Zweitorschaltungen und anschließend die Impedanzmatizen.



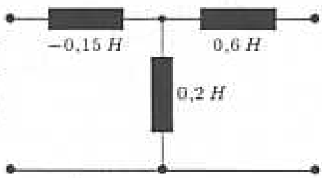


Aufgabe 3.21

Der (ideale) Übertrager ist mit der Impedanz $Z_2 = R + j\omega L$ abgeschlossen. Berechnen Sie die Eingangsimpedanz Z_1 am Tor 1 des Übertragers und geben Sie eine (übertragerfreie) Ersatzschaltung für Z_1 an.

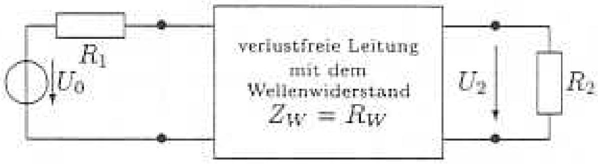


Aufgabe 3.22



Gegeben ist die rechts skizzierte Zweitorschaltung mit einer negativen Induktivität. Berechnen Sie die Kettenmatrix und danach die Impedanzmatrix des Zweitores. Um was für ein Bauelement handelt es sich bei dem Zweitor?

Aufgabe 3.23



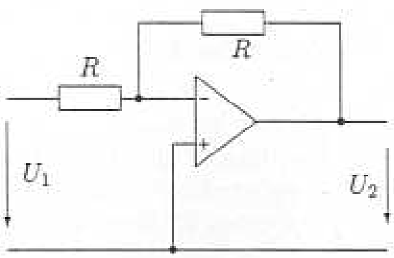
Gegeben ist die rechts skizzierte Schaltung. Bei dem Zweitor soll es sich um eine verlustlose Leitung der Länge l mit dem (rellen) Wellenwiderstand R_W handeln.

a) Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_0$.
b) Berechnen Sie die Eingangsimpedanz W_1 am Tor 1 des Zweitores
c) Ermitteln Sie die Übertragungsfunktion und die Eingangsimpedanz für den Sonderfall $R_1 = R_2 = R_W$.

Aufgabe 3.24

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$ und skizzieren Sie den Betrag dieser Übertragungsfunktion.

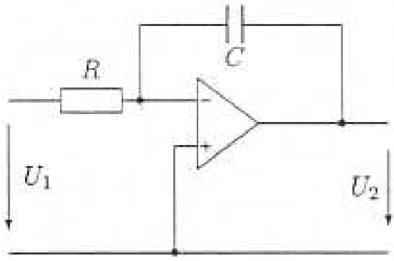
Aufgabe 3.25



Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$ der nebenstehenden Schaltung

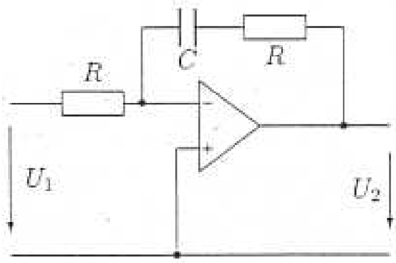
Aufgabe 3.26

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$ der nebenstehenden Schaltung.



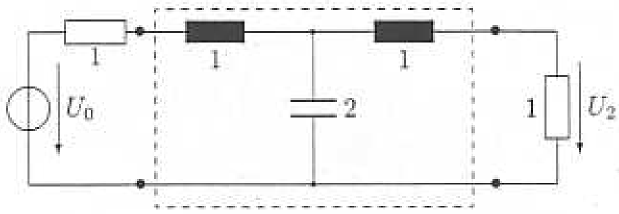
Aufgabe 3.27

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$ der nebenstehenden Schaltung.



Aufgabe 3.28

Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_0$ der nebenstehenden Schaltung. Bei den Bauelementewerten handelt es sich um normierte Größen.



A.3 Lösungen in Kurzform

2.1 $R = 5{,}667\,\Omega$

2.2 $R_{ges} = 28{,}57\,\Omega$

2.3 $R_{ges} = 32{,}375\,\Omega$

2.4 $R_{ges} = 1{,}5\,R$

2.5 $R_{ges} = 1{,}421 \cdot R$ (Stern-Dreieck-Umwandlung)

2.6 $G_2 = G_{ges} - G_1 = 1/12 - 1/20 = 1/30$, $R_2 = 30\,\Omega$

2.7 $\tilde{R} = 2R$: $R_{ges} = 1{,}182 \cdot R$ (Stern-Dreieck-Umwandlung),

$\tilde{R} = R$: $R_{ges} = R$ (abgeglichene Brücke)

2.8 $R = \frac{4}{3}\,\Omega$

2.9 $I_1 = 2,105$ A, $I_2 = 5,263$ A, $I_3 = 2,632$ A

2.10 $U_1 = \frac{1}{3}U_0$, $U_2 = \frac{1}{6}U_0$, $U_3 = \frac{1}{2}U_0$, $U_1 = 20$ V, $U_2 = 10$ V, $U_3 = 30$ V

2.11 $\frac{U_1}{U} = \frac{1}{2+R/R_x}$

$R_x = 0$: $\frac{U_1}{U} = 0$, $R_x = \frac{R}{2}$: $\frac{U_1}{U} = \frac{1}{4}$, $R_x = R$: $\frac{U_1}{U} = \frac{1}{3}$, $R_x = 2R$: $\frac{U_1}{U} = 0,4$, $R_x = \infty$: $\frac{U_1}{U} = \frac{1}{2}$

2.12 $U_0 = \frac{4}{3}I_0R$, $R_i = \frac{2}{3}R$

2.13 $\tilde{U}_0 = U_0$, $\tilde{R}_i = \frac{2}{7}R$, $I = \frac{U_0}{2R/7+R_L}$, $U = R_L\frac{U_0}{2R/7+R_L}$

2.14 $I_0 = 10$ A, $R_i = 10\,\Omega$

2.15 $R_L = R/2$, $P_{max} = 0,0833$ W

2.16 $\tilde{I}_0 = 3I_0$, $\tilde{G}_i = 3G$, $G_L = 3G$

2.17 $R_{ges} = 1,1526\,\Omega$, $I_{ges} = 190,86$ A,

$I_{5\Omega} = 40,18$ A, $P_{5\Omega} = 8073,3$ W, $I_{2\Omega} = 100,46$ A, $P_{2\Omega} = 20183,1$ W,

$I_{4\Omega} = 50,23$ A, $P_{4\Omega} = 10091,5$ W, $P_{ab} = 38347,8$ W, $P_v = 3643$ W, $\eta = 0,913$

2.18 $U = U_0\frac{R_x}{3R+2R_x} - I_0\frac{2RR_x}{3R+2R_x}$, $R_x = R$: $U = \frac{1}{5}U_0 - \frac{2}{5}I_0R = -8$ V

2.19 $\tilde{U}_0 = \frac{1}{2}U_0$, $\tilde{R}_i = \frac{3}{2}R$, $U = \tilde{U}_0\frac{R_x}{\tilde{R}_i+R_x}$, $U = 5\,V\,\frac{R_x}{15\,\Omega+R_x}$, $P_{max} = 0,417$ W

2.20 $\tilde{U}_0 = -I_0R$, $\tilde{R}_i = \frac{3}{2}R$, $I = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{R}_i+R_x}$, $I = -2$ A, Stromteilung: $I = -I_0\frac{R}{3R/2+R_x}$

2.21 $\tilde{U}_0 = 0,8929$ V, $\tilde{R}_i = 21,79\,\Omega$, $I = 20,5$ mA

2.22 $U = I_0R\frac{3R_L}{4R+3R_L}$, $\tilde{U}_0 = I_0R$, $\tilde{R}_i = \frac{4}{3}R$

2.23 $R_{ges} = R$, $I_{ges} = \frac{U_0}{R}$, $I_1 = I_{ges}/2 = \frac{U_0}{2R}$, $I_2 = I_1/2 = \frac{U_0}{4R}$, $I_3 = I_2/2 = \frac{U_0}{8R}$, $I_4 = I_3/2 = \frac{U_0}{16R}$, $I_5 = I_4 = \frac{U_0}{16R}$.

3.1 a) $2\,10^{-3}$ As, b) $U_2 = 100$ V, $C_{ges} = 6,667\,\mu F$, $U_{ges} = 300$ V, c) $C_{ges} = 15\,\mu F$, $Q_{ges} = 3\,10^{-3}$ As

3.2 $U = U_1 + U_2 = 1000$ V, $Q_{12} = 0,0375$ As, $U_1 = 750$ V, $U_2 = 250$ V

3.3 $i(t) = -12,566\sin(\omega t)$

3.4 $i(t) = 2\cos(\omega t)$, $I = \sqrt{2}$, $I_{eff} = \sqrt{2}$, $P = 10$,

$i(t) = -2\cos(\omega t)$, $I = \sqrt{2}e^{j\pi}$, $I_{eff} = \sqrt{2}$, $P = 10$,

$i(t) = 5\cos(\omega t - \pi/3)$, $I = 3,536e^{-j\pi/3}$, $I_{eff} = 3,536$, $P = 62,5$,

$i(t) = -5\cos(\omega t + \pi/6)$, $I = 3,536e^{j7\pi/6}$, $I_{eff} = 3,536$, $P = 62,5$,

$i(t) = \sin(\omega t)$, $I = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{-j\pi/2}$, $I_{eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $P = 2,5$,

$i(t) = 0,5\cos(\omega t + \pi)$, $I = 0,3536e^{j\pi}$, $I_{eff} = 0,3536$, $P = 0,625$,

$u(t) = 3\cos(\omega t)$, $U = 2,12$, $U_{eff} = 2,12$, $P = 0,9$,

$u(t) = -2\cos(\omega t - 0,3)$, $U = \sqrt{2}e^{j2,84}$, $U_{eff} = \sqrt{2}$, $P = 0,4$,

$u(t) = 10\cos(\omega t - \pi/3)$, $U = 7,07e^{-j\pi/3}$, $U_{eff} = 7,07$, $P = 10$,

$u(t) = -6\cos(\omega t - \pi/6)$, $U = 4,24e^{j5\pi/6}$, $U_{eff} = 4,24$, $P = 3,6$,

$u(t) = -\sin(\omega t)$, $U = \frac{1}{2}\sqrt{2}e^{j\pi/2}$, $U_{eff} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $P = 0,1$,

$u(t) = 1,5\cos(\omega t + \pi/8)$, $U = 1,06e^{j\pi/8}$, $U_{eff} = 1,06$, $P = 0,225$

3.5 $I = 2$, $I_{eff} = 2$, $i(t) = 2,83\cos(\omega t)$,

$I = 3e^{j}$, $I_{eff} = 3$, $i(t) = 4,24\cos(\omega t + 1)$,

$I = -2 = 2e^{j\pi}$, $I_{eff} = 2$, $i(t) = 2,83\cos(\omega t + \pi)$,

$I = 0,5e^{j\pi/3}$, $I_{eff} = 0,5$, $i(t) = 0,707\cos(\omega t + \pi/3)$,

$I = -j = e^{-j\pi/2}$, $I_{eff} = 1$, $i(t) = 1,414\cos(\omega t - \pi/2)$,

$U = 1 - j = 1,414e^{-j\pi/4}$, $U_{eff} = 1,414$, $u(t) = 2\cos(\omega t - \pi/4)$,

$U = 6e^{-j}$, $U_{eff} = 6$, $u(t) = 8,49\cos(\omega t - 1)$,

$U = j = e^{j\pi/2}$, $U_{eff} = 1$, $u(t) = 1,414\cos(\omega t + \pi/2)$,

$U = 2 - 3j = 3,61e^{-j0,983}$, $U_{eff} = 3,61$, $u(t) = 5,1\cos(\omega t - 0,983)$,

$U = 5 + 6j = 7,81e^{j0,876}$, $U_{eff} = 7,81$, $u(t) = 11,05\cos(\omega t + 0,876)$

3.6 $u(t) = L\frac{di}{dt} = -4000\sin(\omega t - \pi/4) = 4000\cos(\omega t + \pi/4)$,

$I = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,5e^{-j\pi/4}$, $U = j\omega LI = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,4000e^{j\pi/4}$, $u(t) = 4000\cos(\omega t + \pi/4)$

3.7 $Z = R + j\omega L$, $|Z| = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$, $\varphi = \arctan\frac{\omega L}{R}$

3.8 $Z = \frac{1}{1/R + j\omega C} = \frac{R}{1 + j\omega RC}$, $|Z| = \frac{R}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$, $\varphi = -arctan(\omega RC)$

3.9 $Z = R\frac{2 + j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2}[2 + \omega^2 R^2 C^2] - j\frac{\omega R^2 C}{1 + \omega^2 R^2 C^2}$,

$|Z| = R\sqrt{\frac{4 + \omega^2 R^2 C^2}{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$, $\varphi = arctan\frac{\omega RC}{2} - \arctan(\omega RC)$

$Z = R\frac{R + 2j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2}[R^2 + 2\omega^2 L^2] + j\frac{\omega R^2 L}{R^2 + \omega^2 L^2}$,

$|Z| = R\sqrt{\frac{R^2 + 4\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2}}$, $\varphi = \arctan\frac{2\omega L}{R} - \arctan\frac{\omega L}{R}$

3.10 $Z = \frac{R + j\omega L + (j\omega)^2 RLC}{1 + j\omega RC} = \frac{R}{1 + \omega^2 R^2 C^2} + j\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}[\omega L - \omega R^2 C + \omega^3 R^2 LC^2]$

$Z = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L}{1 - \omega^2 LC} = R + \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$

$Z = \frac{R + j\omega L + (j\omega)^2 RLC}{j\omega C(R + j\omega L)} = \frac{R\omega^2 L^2}{R^2 + \omega^2 L^2} - j\frac{R^2 + \omega^2 L(L - R^2 C)}{\omega C(R^2 + \omega^2 L^2)}$

3.11 $\frac{U_C}{U_0} = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC}$, $\left|\frac{U_C}{U_0}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2}}$, $Q = 5, 10, 20$

3.12 $Z = \frac{j\omega L}{1 + j\omega L/R + (j\omega)^2 LC}$, $|Z| = \frac{\omega L}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2/R^2}}$, $Z_{max} = R$ bei $\omega = 1/\sqrt{LC}$,

$\frac{I_C}{I_0} = \frac{(j\omega)^2 LC}{1 + j\omega L/R + (j\omega)^2 LC}$, $\left|\frac{I_C}{I_0}\right| = \frac{\omega^2 LC}{\sqrt{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 L^2/R^2}}$

3.13 $U = U_0\frac{j\omega L}{3R + 2j\omega L} - I_0 j\omega L\frac{2R}{3R + 2j\omega L}$, $U = 4,81e^{-j0.58}$

3.14 $\tilde{U}_0 = \frac{U_0}{2}$, $\tilde{R}_i = \frac{3}{2}R$, $U = U_0 \frac{1}{2+3j\omega RC}$, $U = \frac{10}{2+3j} = 2,774e^{-j0,983}$

3.15 $\tilde{U}_0 = -I_0 R$, $\tilde{R}_i = R\frac{2+j\omega RC}{1+j\omega RC}$, $I = \frac{\tilde{U}_0}{\tilde{R}_i + j\omega L} = -I_0 \frac{1+j\omega RC}{2+j\omega(L/R+RC)+(j\omega)^2 LC}$

3.16 $G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau}$ (siehe RC-Tiefpaß 1. Grades)

3.17 $G(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}$ (siehe RC-Hochpaß 1. Grades)

3.18 a) $Z_i = Z^* = R - j\omega L$,

b) $Z_i = 100 - j157,08 = R - j\frac{1}{\omega C}$, $R = 100\,\Omega$, $C = 20,26\,\mu F$,

c) $I = \frac{U_0}{Z+Z_i} = 2$ A, $U = IZ = 200 + j314,16$, $S = UI^* = 400 + j628,3$,

d) Verbraucher: $P = 400$ W, $Q = 628,3$ VA, Quelle: $P = 400$ W, $Q = -628,3$ VA

3.19 a) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+j\omega L/R & j\omega L \\ 1/R & 1 \end{pmatrix}$, b) $G(j\omega) = \frac{1}{3+2j\omega L/R}$, c) $|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{9+4\omega^2 L^2/R^2}}$, d) $Z_1 = \frac{R}{2} + j\omega L$

3.20 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+j\omega L/R & j\omega L \\ 1/R & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} R+j\omega L & R \\ R & R \end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+R/(j\omega L) & R \\ 1/(j\omega L) & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} R+j\omega L & j\omega L \\ j\omega L & j\omega L \end{pmatrix}$

3.21 $Z_1 = \ddot{u}^2 R + j\omega\ddot{u}^2 L$, Reihenschaltung $\tilde{R} = \ddot{u}^2 R$ und $\tilde{L} = \ddot{u}^2 L$

3.22 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+L_1/L_2 & j\omega(L_1+L_3+L_1L_3/L_2) \\ 1/(j\omega L_2) & 1+L_3/L_2 \end{pmatrix}$,

mit $L_1 = -0,15$ H, $L_2 = 0,2$ H, $L_3 = 0,6$ H:

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ 1/(j\omega 0,2) & 4 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} j\omega 0,05 & j\omega 0,2 \\ j\omega 0,2 & j\omega 0,8 \end{pmatrix}$,

Realer (verlustloser und streuungsfreier) Übertrager mit $\ddot{u} = 1/4$

3.23 a) $G(j\omega) = \frac{1}{\cos(\beta l)(1+R_1/R_2)+j\sin(\beta l)(R_W/R_2+R_1/R_W)}$,

b) $Z_1 = \frac{R_2\cos(\beta l)+jZ_W\sin(\beta l)}{jR_2/R_W\sin(\beta l)+\cos(\beta l)}$, c) $G(j\omega) = \frac{1}{2\cos(\beta l)+2j\sin(\beta l)} = \frac{1}{2}e^{-j\beta l}$, $Z_1 = Z_W$

3.24 $G(j\omega) = \left(\frac{1}{1+j\omega L/R}\right)^2$, $|G(j\omega)| = \frac{1}{1+\omega^2 L^2/R^2}$

3.25 $G(j\omega) = -1$

3.26 $G(j\omega) = -\frac{1}{j\omega RC}$

3.27 $G(j\omega) = -\left(1+\frac{1}{j\omega RC}\right) = -\frac{1+j\omega RC}{j\omega RC}$

3.28 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1+2(j\omega)^2 & 2(j\omega)+2(j\omega)^3 \\ 2(j\omega) & 1+2(j\omega)^2 \end{pmatrix}$, $G(j\omega) = \frac{1}{2}\frac{1}{1+2(j\omega)+2(j\omega)^2+(j\omega)^3}$

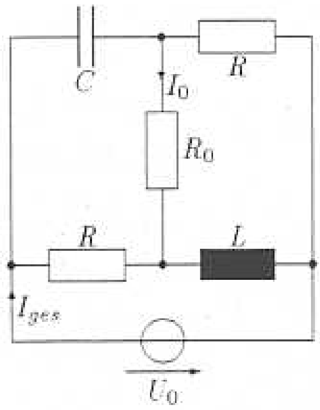
Klausur Grundlagen der Elektrotechnik für Informatiker am 1.7.96	A

Name:	Matr.Nr.	Unterschrift:
	Bemerkungen	Punkte/Note:

1	2	3	4	5	6	7	Summe
21	37	28	22				108

Aufgabe 1

Das Bild zeigt eine an eine Spannungsquelle angeschlossene Brückenschaltung mit zunächst noch nicht festgelegten Werten für die Induktivität und Kapazität.



1.1 Was versteht man unter einer "abgeglichenen Brücke"?

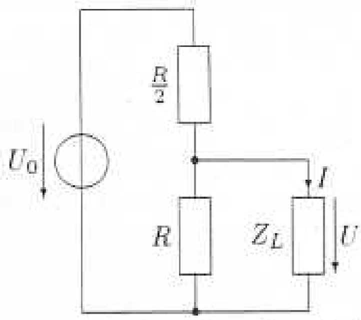
1.2 Ermitteln Sie L und C, bzw. das Verhältnis von L und C so, daß die Brücke abgeglichen ist.

1.3 Berechnen Sie den in der Schaltung eingetragenen Strom I_{ges} unter der Voraussetzung einer abgeglichenen Brücke.

1.4 Beschreiben Sie eine Methode, wie mit dieser Brückenschaltung (verlustfreie) Induktivitäten gemessen werden können.

Aufgabe 2

Die Spannung U an dem Zweipol Z_L soll mit Hilfe der Ersatzspannungsquelle berechnet werden.



2.1 Berechnen Sie die Leerlaufspannung $\tilde{U}_0$ und den Innenwiderstand R_i der Ersatzspannungsquelle. Zeichnen Sie die Ersatzspannungsquelle mit der angeschlossenen Belastungsimpedanz Z_L.

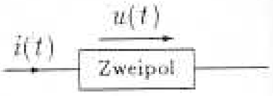
2.2 Unter Verwendung der Ergebnisse von Punkt 2.1 soll eine Gleichung für die Spannung U und den Strom I angegeben werden.

2.3 Wie groß muß die Impedanz Z_L sein, damit in ihr eine maximale Leistung verbraucht wird (Antwort begünden!)? Berechnen Sie weiterhin den Strom I und dann die in der Abschlußimpedanz verbrauchte maximale Leistung. Wie groß ist in diesem Fall der Wirkungsgrad?

2.4 Berechnen Sie U, wenn es sich bei der Impedanz um eine Induktivität L handelt. Geben Sie den Betrag von U an.

Aufgabe 3

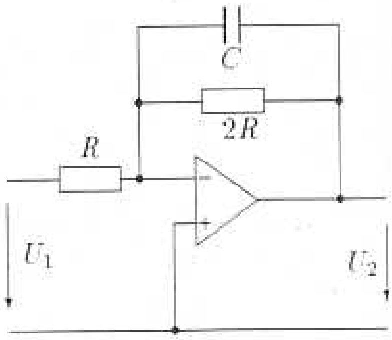
Das Bild zeigt einen Zweipol an dem die Spannung $u(t) = 2\sin(\omega t + \pi/3)$ anliegt und durch den ein Strom $i(t) = 3\cos(\omega t)$ fließt.



3.1 Geben Sie die komplexen Amplituden $\hat{U}$, $\hat{I}$, die komplexe Spannung U, den komplexen Strom I und die Effektivwerte an.
3.2 Ermitteln Sie die Impedanz Z des Zweipoles.
3.3 Geben Sie eine Schaltung für den Zweipol bei einer Frequenz von 1000 Hz an.

Aufgabe 4

Das Bild zeigt eine Zweitorschaltung mit einem Operationsverstärker.
4.1 Geben Sie bitte (stichwortartig) an, in welchen Punkten sich ein idealer von einem realen Operationsverstärker unterscheidet.
4.2 Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = \frac{U_2}{U_1}$ unter der Voraussetzung eines idealen Operationsverstärkers.
4.3 Ermitteln und skizzieren Sie den Betrag $|G(j\omega)|$.
4.4 Wie nennt man eine Zweitorschaltung mit der hier vorliegenden Übertragungsfunktion?



Lösungen in Kurzform

Aufgabe 1

$$I_0 = 0,\ L/C = R^2,\ I_{ges} = U_0 \left\{ \frac{j\omega C}{1 + j\omega RC} + \frac{1}{R + j\omega L} \right\}.$$

Einstellbare Kapazität solange verändern bis Brücke abgeglichen ist, dann $L = R^2C$.

Aufgabe 2

$$\tilde{U}_0 = \frac{2}{3}U_0,\ R_i = \frac{1}{3}R,\ U = U_0\frac{2Z_L}{R + 3Z_L},\ I = U_0\frac{2}{r + 3Z_L}.$$

$Z_L = R_i = R/3$, Leistungsanpassung, $I = U_0/R$,

$$P_{max} = |I|^2\frac{1}{3}R = \frac{|U_0|^2}{3R},\ \eta = 0,5,\ U = U_0\frac{2j\omega L}{R + 3j\omega L},\ |U| = |U_0|\frac{2\omega L}{\sqrt{R^2 + 9\omega^2L^2}}.$$

Aufgabe 3

$\hat{U} = 2e^{-j\pi/6}$, $U = \sqrt{2}e^{-j\pi/6}$, $U_{eff} = \sqrt{2}$, $\hat{I} = 3$, $I = 1,5\sqrt{2}$, $I_{eff} = 1,5\sqrt{2}$,

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{2}{3}e^{-j5\pi/6} = 0,577 - j0,333.$$

Reihenschaltung von $R = 0,577$ Ohm und $C = 53,05$ nF.

Aufgabe 4

Keine unendlich große Verstärkung, Frequenabhängigkeit,

$$G(j\omega) = -\frac{2}{1 + 2j\omega RC},\ |G(j\omega)| = \frac{2}{\sqrt{1 + 4\omega^2R^2C^2}}.$$

Tiefpaß.

Elektrotechnik für Informatiker, Teil 1 am 19.12.97	A

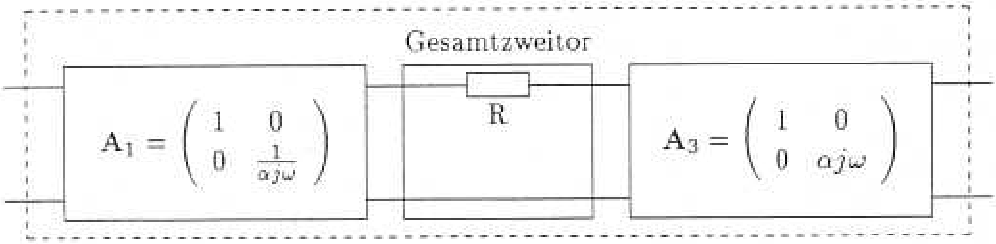
Name:	Matr.Nr.	*Unterschrift:*

Prüfung: *ankreuzen*		Studienleistung: *ankreuzen*		*Bemerkungen*	Punkte/Note:

1	2	3	4	5	6	7	Summe
21	28	19	12	10			90

Aufgabe 1

Das Bild zeigt drei in Kette geschaltete Zweitore. Von dem rechten und linken Zweitor sind die Kettenmatrizen gegeben.



1.1 Ermitteln Sie die Kettenmatrix des mittleren Zweitores.

1.2 Welche Dimension hat der Faktor α in den anderen Kettenmatrizen (Begründung!).

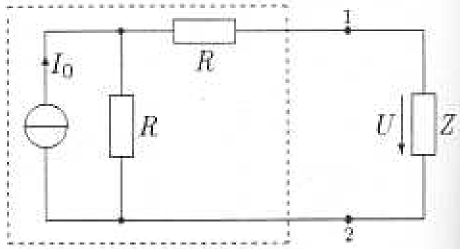
1.3 Berechnen Sie die Kettenmatrix $\mathbf{A}$ der Gesamtschaltung.

1.4 Durch welche ganz einfache Zweitorschaltung kann die Kettenschaltung ersetzt werden (Angabe der Schaltung mit Bauelementen).

Aufgabe 2

Die Spannung U an dem Zweipol Z soll mit Hilfe der Ersatzspannungsquelle berechnet werden.

2.1 Berechnen Sie die Leerlaufspannung $\tilde{U}_0$ und die Innenimpedanz Z_i der Ersatzspannungsquelle. Zeichnen Sie die Ersatzspannungsquelle mit der angeschlossenen Belastungsimpedanz Z.

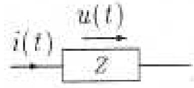


2.2 Berechnen Sie die Spannung U in Abhängigkeit von der Belastungsimpedanz Z.

2.3 Ermitteln Sie U und dann $|U|$ im Fall $Z = j\omega L$.

2.4 Wählen Sie die Impedanz Z jetzt so, daß in ihr die maximale Leistung verbraucht wird, wie groß ist dann U und wie groß die Leistung P_{max}?

Aufgabe 3



An dem rechts skizzierten Zweipol liegt eine Spannung von $u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t)$, der Strom hat die Form $i(t) = \hat{i} \cdot \cos(\omega t - \varphi)$.

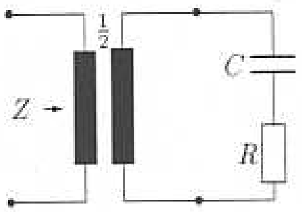
3.1 Geben Sie die komplexen Amplituden für die Spannung und den Strom an.

3.2 Berechnen Sie die komplexe Leistung.

3.3 Legen Sie den Nullphasenwinkel φ so fest, daß die Wirkleistung den gleichen Wert wie die Blindleistung hat. Wie groß ist dann die Wirkleistung?

Aufgabe 4

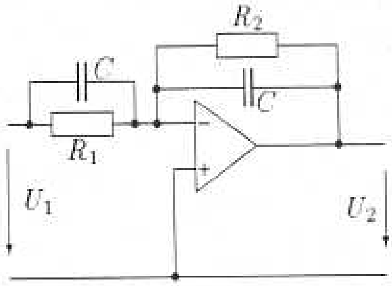
Das Bild zeigt einen idealen Übertrager mit dem Übersetzungsverhältnis $\frac{1}{2}$. Der ideale Übertrager ist auf der Sekundärseite mit einer Impedanz abgeschlossen.



4.1 Berechnen Sie die Eingangsimpedanz Z an den Eingangsklemmen des Übertragers.

4.2 Geben Sie für Z eine übertragerfreie Ersatzschaltung mit ihren Bauelementen an.

Aufgabe 5



Das Bild zeigt einen als ideal vorausgesetzten beschalteten Operationsverstärker.

5.1 Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$.

5.2 Kann man die Bauelementewerte so wählen, daß eine konstante (frequenzunabhängige) Übertragungsfunktion entsteht? Wie groß ist dann $G(j\omega)$?

Elektrotechnik für Informatiker (alte PO) am 1.7.98	D

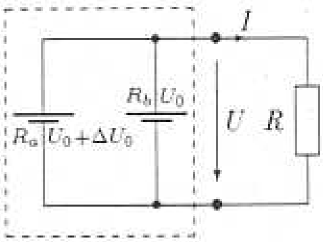
Name:	Matr.Nr.	*Unterschrift:*

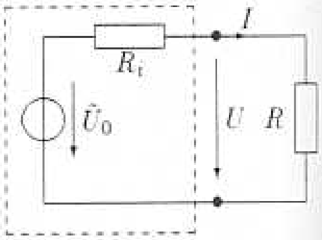
Prüfung				*Bemerkungen*	Punkte/Note:

23	19	19	19				80
1	2	3	4	5	6	7	Summe

Aufgabe 1

Gegeben ist Anordnung mit zwei parallelgeschalteten Batterien fast gleicher Spannungen $U_0 + \Delta U_0$ und U_0, jedoch mit unterschiedlichen Innenwiderständen R_a und R_b. An diese Schaltung ist ein Verbraucher mit dem Widerstand R angeschlossen.

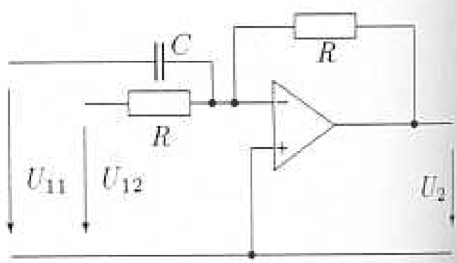




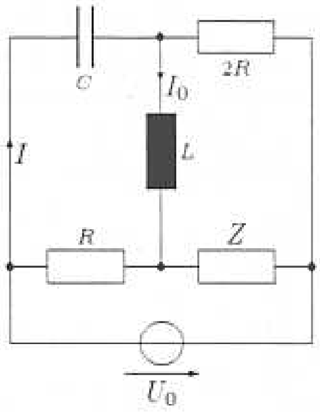
1.1 Wandeln Sie diese Parallelschaltung in die Schaltung gemäß dem rechten Bild um. Wie groß sind $\tilde{U}_0$ und R_i.
Aus Ihrer Lösung müssen die einzelnen Umwandlungsschritte eindeutig hervorgehen (Schaltungen bei den Zwischenschritten angeben!).
1.2 Wie groß muß der Belastungswiderstand sein, damit in ihm eine maximale Leistung verbraucht wird. Wie groß ist in diesem Fall die Spannung U unter der Voraussetzung $\Delta U_0 = 0$?
1.3 Warum schaltet man in der Praxis Batterien mit gleicher Spannung parallel? Welche Probleme bzw. Nachteile treten auf, wenn die Spannungen der beiden Batterien nicht exakt gleich groß sind?

Aufgabe 2

2.1 Berechnen Sie die Ausgangsspannung U_2 bei der nebenstehenden Schaltung in Abhängigkeit von den Eingangsspannungen U_{11} und U_{12}.
2.2 Wie groß ist U_2 im Fall $U_{11} = 0$ und speziell bei $U_{12} = 3e^{j\pi/6}$?
2.3 Ausgehend von der bei Frage 2.2 gefundenen Lösung soll $u_2(t)$ angegeben werden.
2.4 Wie groß ist U_2 im Fall $U_{12} = 0$ und speziell bei $U_{12} = 2$?



Aufgabe 3



Das Bild zeigt eine an eine Spannungsquelle angeschlossene Brückenschaltung mit einer zunächst noch nicht bekannten Impedanz Z.

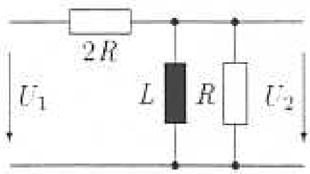
3.1 Wie lautet die Abgleichbedingung für diese Brückenschaltung, und wie groß ist der Strom I_0 im abgeglichenen Zustand?

3.2 Legen Sie die Impedanz so fest, daß die Brücke abgeglichen ist.

3.3 Um was für ein Bauelement handelt es sich bei Z. Berechnen Sie den Wert des Bauelementes bei $R = 1000$ Ohm, $C = 100$ nF.

3.4 Berechnen Sie den Strom I, wenn die Brücke abgeglichen ist.

Aufgabe 4



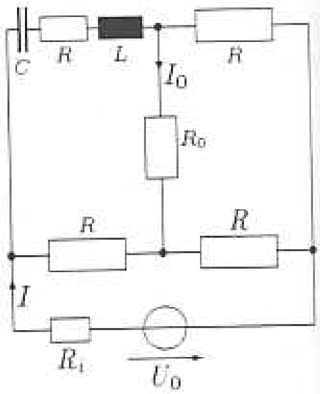
4.1 Berechnen Sie die Übertragungsfunktion der nebenstehenden Schaltung und stellen Sie diese in der Form $G(j\omega) = \frac{a \cdot j\omega}{b + c \cdot j\omega}$ dar.

4.2 Ermitteln und skizzieren Sie den Betrag der Übertragungsfunktion.

4.3 Begründen Sie aus dem Ergebnis der Frage 4.2, warum die vorliegende Schaltung kein Tiefpaß ist.

Elektrotechnik für Informatiker am 16.11.98							
Name:			Matr.Nr.		*Unterschrift:*		
Prüfung: *ankreuzen*		Studienleistung: *ankreuzen*		*Bemerkungen*		Punkte/Note:	
15 — 1	18 — 2	23 — 3	4	5	6	7	56 Summe

Aufgabe 1



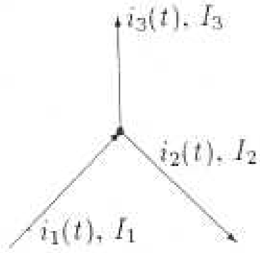
Das Bild zeigt eine an eine Spannungsquelle angeschlossene Brückenschaltung.

1.1 Unter welcher Bedingung und bei welcher Kreisfrequenz ist die Brücke abgeglichen?

1.2 Berechnen Sie den in der Schaltung eingetragenen Strom I bei abgeglichener Brücke.

Aufgabe 2

Gegeben ist der Strom $i_1(t) = 3 \cdot \cos(\omega t)$ und der komplexe Strom $I_2 = \frac{3}{\sqrt{2}} e^{j\pi/2}$.



2.1 Berechnen Sie den komplexen Strom I_1 und den Strom $i_2(t)$.

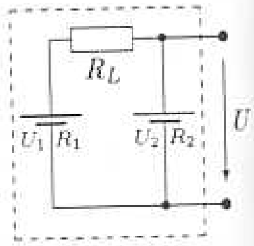
2.2 Berechnen Sie den Strom $i_3(t)$.

2.3 Berechnen Sie I_3, seinen Effektivwert und Phasenwinkel.

Nützliche Beziehungen:
$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$, $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x - \pi/4)$.

Aufgabe 3

Zwei Batterien (U_1, R_1/U_2, R_2) sind parallelgeschaltet. Die Verbindungsleitung zwischen den Batterien hat den Widerstand R_L. Zu berechnen ist die Klemmenspannung U mit Hilfe des *Überlagerungssatzes.*



3.1 Berechnen Sie den von der linken Batterie herrührenden Anteil der Spannung (Bezeichnung U_l). Zeichnen Sie die hierbei maßgebende Schaltung mit allen erforderlichen Angaben.

3.2 Berechnen Sie den von der rechten Batterie herrührenden Anteil der Spannung (Bezeichnung U_r). Zeichnen Sie auch hier die maßgebende Schaltung mit allen erforderlichen Angaben.

3.3 Ermitteln Sie die Spannung U.

Elektrotechnik für Informatiker (Teil E) am 18.1.00	A

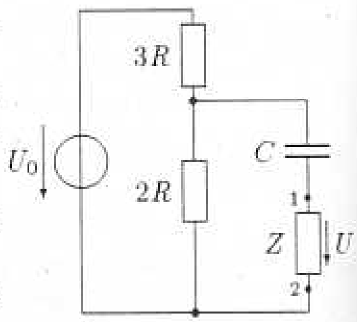
Name:	Matr.Nr.	*Unterschrift:*

Prüfung		Studienleistung:		*Bemerkungen*	Punkte/Note:

1	2	3	4	5	6	7	Summe
26	20	10					56

Aufgabe 1

Das Bild zeigt eine Schaltung mit einer zunächst noch nicht bekannten Impedanz Z.



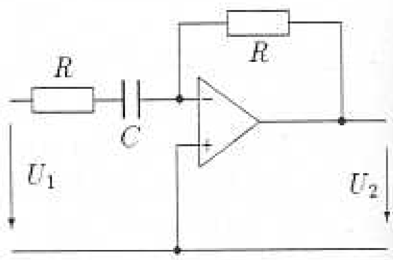
1.1 Ermitteln Sie die Ersatzspannungsquelle bezüglich der Impedanz Z (Berechnung von $\bar{U}_0$ und Z_i). Zeichnen Sie die Ersatzspannungsquelle.

1.2 Berechnen Sie mit Hilfe der Ersatzspannungsquelle die Spannung an der Impedanz Z, zunächst allgemein und dann für $Z = \frac{4}{5}R$.

1.3 Berechnen Sie die mittlere Leistung in der Abschlußimpedanz $Z = \frac{4}{5}R$.

Aufgabe 2

Die rechts stehende Schaltung zeigt einen aktiven Hochpaß 1. Grades.



2.1 Berechnen Sie die Übertragungsfunktion $G(j\omega) = U_2/U_1$.

2.2 Ermitteln und skizzieren Sie den Betragsverlauf $|G(j\omega)|$ bis zur 5-fachen Grenzkreisfrequenz ($\omega_g = \frac{1}{RC}$). Wie groß ist $|G(j0,5\omega_g)|$ bei der halben Grenzkreisfrequenz und wie groß ist die Dämpfung in dB.

2.3 Geben Sie eine passive Schaltung an, die (ggf. bis auf das Vorzeichen) die gleiche Übertragungsfunktion wie der vorliegende aktive Hochpaß hat (Antwort begünden!).

Aufgabe 3

Bei dem nebenstehenden Zweipol gilt $u(t) = 3\sqrt{2}\cos(\omega t)$, und die komplexe Leistung beträgt $\underline{S} = 6e^{j\pi/3}$. Ermitteln Sie die Impedanz des Zweipoles.